Education320.com

СПРАВОЧНИК ПО МАТЕМАТИКЕ

(В ФОРМУЛАХ, ТАБЛИЦАХ, РИСУНКАХ)

$ax^2 + bx + c = 0$	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$ax^2 + c = 0$	$x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$
$ax^2 + bx = x(ax + b) = 0$	$x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{b}{a}$
$x^2 + px + q = 0$	Т. Виета $x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 \cdot x_2 = q$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,$$
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3,$$
$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b),$$
$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2),$$
$$a^m - b^m = (a - b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + \ldots + ab^{m-2} + b^{m-1}).$$

Я слышу и забываю,
Я вижу и запоминаю,
Я делаю и понимаю.
Конфуций

Условные обозначения

Математика – наука формализованная. В течение веков выкристаллизовывались ее язык, ее символика, способствующие компактности изложения материала.

1. $\in$ – принадлежать, $\notin$ – не принадлежать.
2. $\cup$ – объединение, $\cap$ – пересечение.
3. $\Rightarrow$ – логическое следствие.
3. $\Leftrightarrow$ – логическая эквивалентность (тогда и только тогда).
4. $\forall$ – квантор всеобщности (для любого, для всякого).
5. $\exists$ – квантор существования.
6. $\sum$ – сумма: $a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$.
7. $\|$ – параллельность (прямых), коллинеарность (векторов).
8. $\perp$ – перпендикулярность (прямых, векторов).
9. $\uparrow\uparrow$ – сонаправленность (векторов), $\uparrow\downarrow$ – противоположная направленность (векторов).
10. $=$ – равно, $\neq$ – не равно.
11. $\approx$ – приближенно равно.
12. $>$ – больше, $<$ – меньше.
13. $\geq$ – больше или равно, $\leq$ – меньше или равно.
14. % – процент (сотая доля).

Раздел 1. АЛГЕБРА

Действия с дробями

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}, \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \qquad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Пропорции

Пропорцией называется равенство двух отношений: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ или $a : b = c : d$. Основное свойство пропорции: $ad = bc$.

Перестановка членов пропорции

$a : b = c : d$	$c : d = a : b$
$d : b = c : a$	$b : d = a : c$
$a : c = b : d$	$c : a = d : b$
$d : c = b : a$	$b : a = d : c$

Квадратное уравнение

Вид уравнения	Корни уравнения
$ax^2 + bx + c = 0$	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$ax^2 + c = 0$	$x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$
$ax^2 + bx = x(ax + b) = 0$	$x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{b}{a}$
$x^2 + px + q = 0$	Т. Виета $x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 \cdot x_2 = q$

Разложение квадратного трёхчлена на множители

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$
$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2).$$

Формулы сокращённого умножения

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,$$
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3,$$
$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b),$$
$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)\left(a^2 \mp ab + b^2\right),$$
$$a^m - b^m = (a-b)\left(a^{m-1} + a^{m-2}b + \ldots + ab^{m-2} + b^{m-1}\right).$$

Действия со степенями и корнями

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}, \quad n \in N \qquad a^0 = 1, (a \neq 0) \qquad a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$$

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n \qquad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m} \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \qquad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Логарифмы

$$\log_a b = x \;\Rightarrow\; a^x = b, \quad a > 0, a \neq 1.$$

$a^{\log_a b} = b$ − *основное логарифмическое тождество.*

Десятичный логарифм – $\log_{10} N = \lg N$,

натуральный логарифм – $\log_e N = \ln N$, где

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2{,}718281828459045\ldots$$

$$\log_a 1 = 0 \qquad \log_a a = 1$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \qquad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\log_a u + \log_a v = \log_a (u \cdot v) \qquad \log_a u - \log_a v = \log_a \left(\frac{u}{v}\right)$$

$$n \log_a b = \log_a b^n \qquad \log_a 0 = \begin{cases} -\infty, & a > 1 \\ +\infty, & a < 1 \end{cases}$$

Прогрессии

Арифметическая прогрессия – числовая последовательность, в которой каждое число, начиная со второго, равно предыдущему, сложенному с одним и тем же числом d (d – *разность* арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$)	*Геометрическая прогрессия* – числовая последовательность, в которой каждое число, начиная со второго, равно предыдущему, умноженному на одно и то же число q (q – *знаменатель* геометрической прогрессии $u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ...$)
$d > 0$ – прогрессия возрастающая; $d < 0$ – прогрессия убывающая	$q > 1$ – прогрессия возрастающая; $\lvert q \rvert < 1$ – прогрессия убывающая; $q < 0$ – прогрессия знакопеременная
Общий член прогрессии:	
$a_n = a_1 + (n-1)d$	$u_n = u_1 q^{n-1}$
Сумма n первых членов прогрессии:	
$S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$ или $S_n = \dfrac{[2a_1 + d(n-1)] \cdot n}{2}$	$S_n = \dfrac{u_1 - u_n \cdot q}{1-q}$, $(q \neq 1)$. Если $\lvert q \rvert < 1$, то $S = \dfrac{u_1}{1-q}$ – сумма *бесконечно убывающей* прогрессии

Проценты

Процент – сотая часть числа.

$\frac{a}{100\%} = 0{,}01a$ – 1 % от числа a; $\frac{a}{100\%} \cdot x = 0{,}01ax$ – x % от числа a;

$\frac{a}{b} = \frac{x}{100} \Leftrightarrow x = \frac{100a}{b}$ – a составляет x % от b.

Средние величины

1. Среднее арифметическое n чисел: $m_a = \dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n}$.
2. Среднее геометрическое n чисел: $m_g = \sqrt{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_n}$.
3. Среднее гармоническое n чисел: $m_h = \dfrac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + ... + \frac{1}{a_n}}$.

Раздел 2. ТРИГОНОМЕТРИЯ

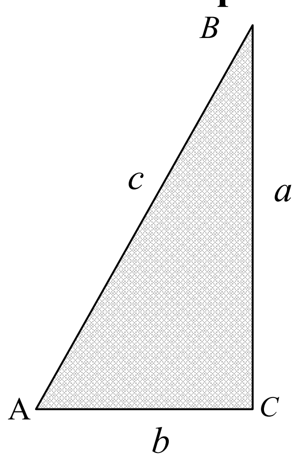
Сравнительная таблица градусной и радианной мер углов

$$1 \text{ радиан} = \frac{180^0}{\pi} \approx 57^0 17'45''; \quad 1^0 = \frac{\pi}{180} \text{радиана} \approx 0{,}017453 \text{ радиана};$$

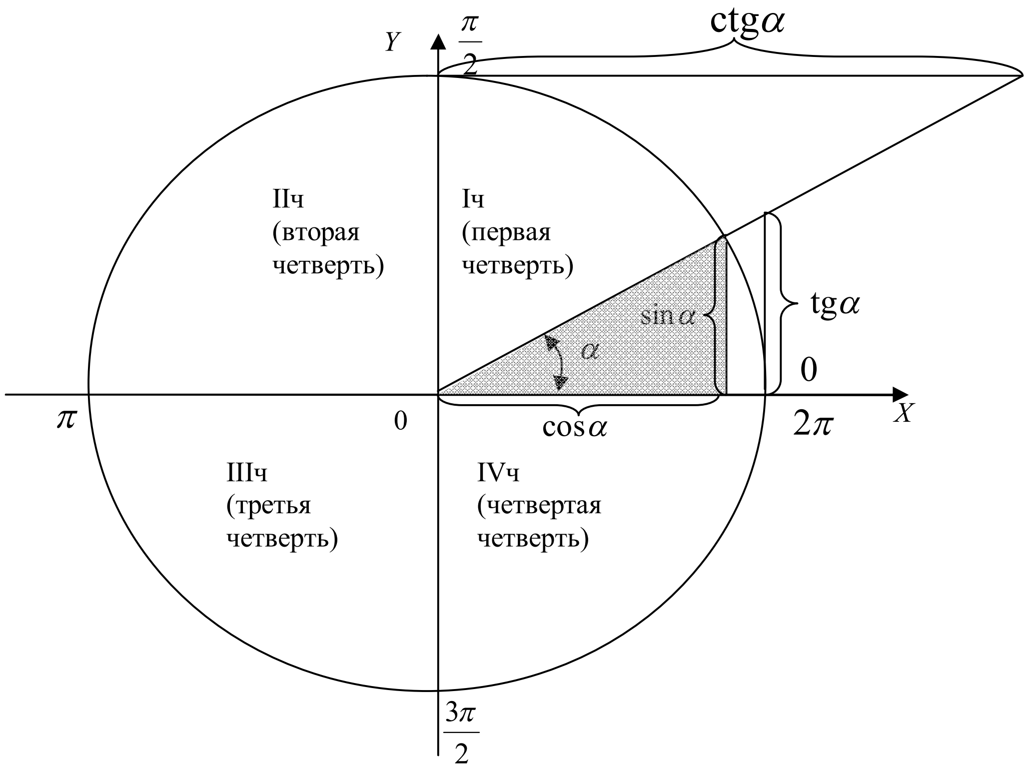
$$1' = \frac{\pi}{180 \cdot 60} \text{радиана} \approx 0{,}000291 \text{радиана}.$$

Углы в градусах	Углы в радианах	Углы в градусах	Углы в радианах
0	0	150	$\frac{5\pi}{6}$
30	$\frac{\pi}{6}$	180	π
45	$\frac{\pi}{4}$	225	$\frac{5\pi}{4}$
60	$\frac{\pi}{3}$	240	$\frac{4\pi}{3}$
90	$\frac{\pi}{2}$	270	$\frac{3\pi}{2}$
120	$\frac{2\pi}{3}$	300	$\frac{5\pi}{3}$
135	$\frac{3\pi}{4}$	360	2π

Тригонометрические функции и их знаки



Функция и ее название	Аргумент φ	
	$\varphi = A$	$\varphi = B$
$\sin\varphi$ (синус)	a/c	b/c
$\cos\varphi$ (косинус)	b/c	a/c
$\mathrm{tg}\,\varphi$ (тангенс)	a/b	b/a
$\mathrm{ctg}\,\varphi$ (котангенс)	b/a	a/b
$\sec\varphi$ (секанс)	c/b	c/a
$\mathrm{cosec}\,\varphi$ (косеканс)	c/a	c/b



Четверть	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$
I	+	+	+	+
II	+	-	-	-
III	-	-	+	+
IV	-	+	-	-

Значения тригонометрических функций некоторых углов

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\mathrm{tg}\, x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0
$\mathrm{ctg}\, x$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0	∞

~~Тригонометрические тождества~~

Операции над тригонометрическими функциями	Тождества
Соотношения между тригонометрическими функциями	$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ – основное тригонометрическое тождество; $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$; $\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha = 1$; $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$; $\mathrm{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$; $\sec^2\alpha = 1 + \mathrm{tg}^2\alpha$; $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = \frac{1}{1 + tg^2\alpha} = \frac{\mathrm{ctg}^2\alpha}{1 + \mathrm{ctg}^2\alpha}$; $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = \frac{1}{1 + \mathrm{ctg}^2\alpha} = \frac{\mathrm{tg}^2\alpha}{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}$
Формулы для суммы и разности углов	$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$; $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$; $\mathrm{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha \pm \mathrm{tg}\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}$
Формулы двойного угла	$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}{1 + \mathrm{tg}^2\alpha} = 1 - 2\sin^2\alpha$ $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}$; $\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}$
Формулы понижения степени	$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$; $\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$
Формулы преобразования суммы и разности в произведение тригонометрических функций	$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}$; $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2}$; $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}$;

Окончание таблицы

	$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$; $\mathrm{tg}\alpha \pm \mathrm{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$
Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму и разность	$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$; $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$; $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$; $\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{\mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{ctg}\beta}$

Формулы приведения

α	sin	cos	tg	ctg
$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$
$\frac{\pi}{2}\pm\alpha$	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$\mp\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mp\mathrm{tg}\,\alpha$
$\pi\pm\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\mathrm{tg}\,\alpha$	$\pm\mathrm{ctg}\,\alpha$
$\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$\mp\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mp\mathrm{tg}\,\alpha$
$2\pi\pm\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\pm\mathrm{tg}\,\alpha$	$\pm\mathrm{ctg}\,\alpha$

Правило получения формул приведения.

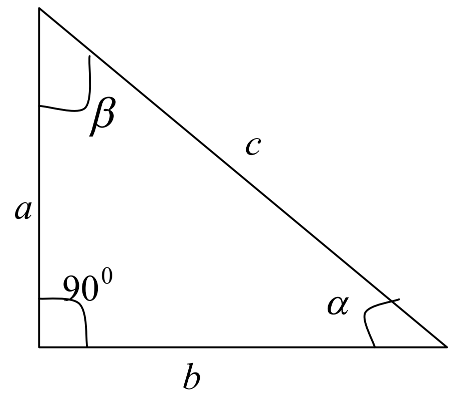
1) Если угол откладывается от горизонтальной оси (для углов $\pi\pm\alpha; 2\pi\pm\alpha$), название исходной функции сохраняется. Если угол откладывается от вертикальной оси (для углов $\frac{\pi}{2}\pm\alpha; \frac{3\pi}{2}\pm\alpha$), название исходной функции заменяется (синус на косинус, косинус на синус, тангенс на котангенс, котангенс на тангенс).

2) В правой части формулы ставится тот же знак, который имеет левая часть при условии $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

П р и м е р. $\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha) = +\cos\alpha$ (синус во второй четверти положителен, угол откладывается от вертикальной оси).

Раздел 3. ПЛАНИМЕТРИЯ И СТЕРЕОМЕТРИЯ

Площади фигур



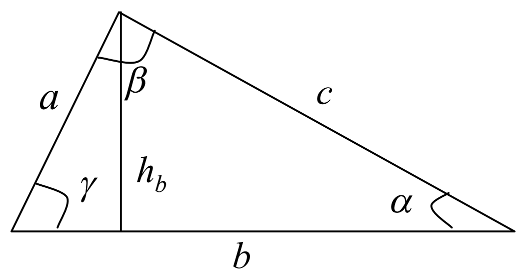
Прямоугольный треугольник

a, b – катеты, c – гипотенуза,

α, β – острые углы,

$$S = \frac{ab}{2},$$

$c^2 = a^2 + b^2$ – теорема Пифагора.



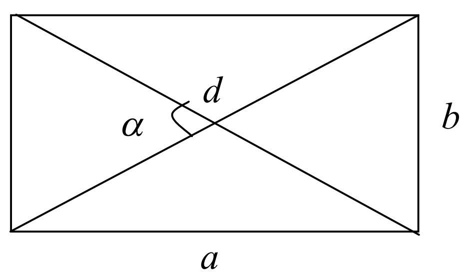
Произвольный треугольник

$$S = \frac{cb}{2}\sin\alpha = \frac{bh_b}{2},$$

$p = \dfrac{a+b+c}{2}$ – полупериметр,

r – радиус вписанной окружности,

$$S = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$



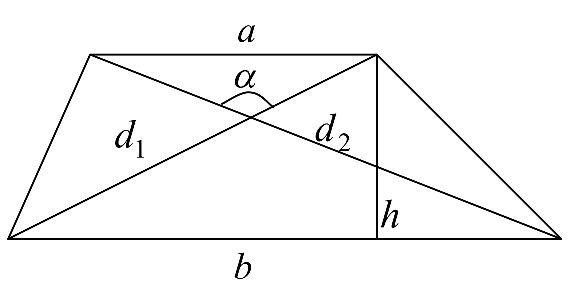
Прямоугольник

a – длина (основание),

b – ширина (высота),

d – диагональ,

$$S = ab = \frac{d^2}{2}\sin\alpha.$$



Трапеция

h – высота,

a, b – основания,

$$S = \frac{a+b}{2}h = \frac{d_1 d_2}{2}\sin\alpha.$$

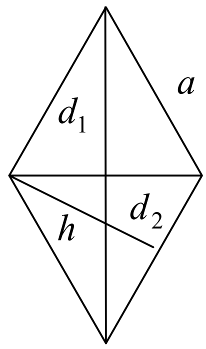
Ромб

a – сторона,

d_1, d_2 – диагонали,

h – высота,

$$S = ah = \frac{d_1 d_2}{2}.$$



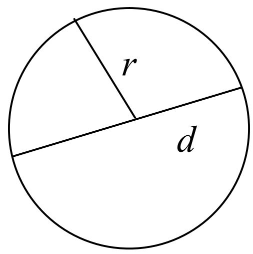
Окружность и круг

d – диаметр окружности (круга), r – радиус окружности (круга), длина окружности:

$$C = \pi d = 2\pi r,$$

площадь круга:

$$S = \frac{\pi d^2}{4} = \pi r^2 = \frac{rC}{2}.$$



Круговой сектор

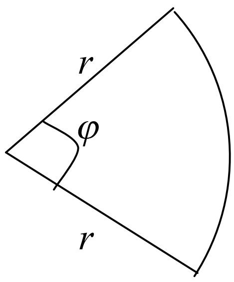
r – радиус,

l – длина дуги,

φ° – градусная мера дуги,

$$l = \frac{2\pi r \varphi^\circ}{360^0},$$

$$S = \frac{\pi r^2 \varphi^\circ}{360}.$$



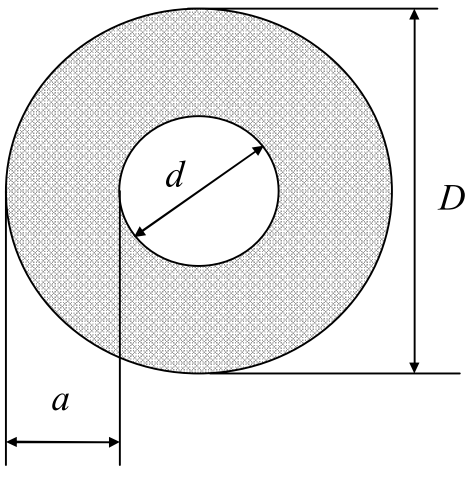
Круговое кольцо

D – большой диаметр,

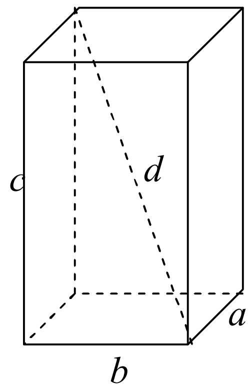
d – малый диаметр,

a – ширина кольца,

$$S = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2).$$



Площади поверхностей и объемы тел



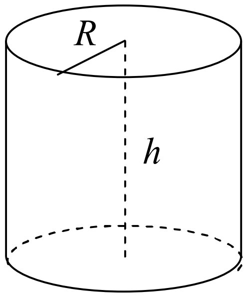
Прямоугольный параллелепипед

d − диагональ параллелепипеда,

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c} \ ,$$

$$S = 2(ab + ac + bc)\,,$$

$$V = abc\,.$$

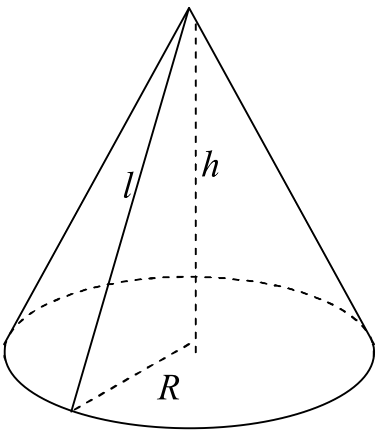


Цилиндр (прямой круговой)

$$S_{боковой} = 2\pi Rh\,,$$

$$S_{полной} = 2\pi R(h + R)\,,$$

$$V = \pi R^2 h\,.$$



Конус (прямой круговой)

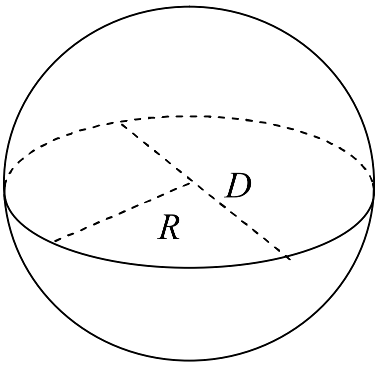
l – образующая конуса**,**

$$l = \sqrt{R^2 + h^2}\,,$$

$$S_{боковой} = \pi Rl\,,$$

$$S_{полной} = \pi R(R + l)\,,$$

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h\,.$$



Сфера и шар

S – площадь сферы,

$$S = 4\pi R^2 = \pi D^2\,,$$

V – объем шара,

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3\,.$$