А. Г. Мерзляк
В. Б. Полонский
М. С. Якир

# АЛГЕБРА

учебник для 8 класса
общеобразовательных учебных заведений
с обучением на русском языке

Рекомендовано
Министерством образования и науки Украины

Харьков
«Гимназия»
2016

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я721
М52

*Рекомендовано*
*Министерством образования и науки Украины*
(приказ МОН Украины от 10.05.2016 № 491)

**Издано за счет государственных средств.**
**Продажа запрещена**

*Эксперты, которые проводили экспертизу данного учебника во время проведения конкурсного отбора проектов учебников для учащихся 8 класса общеобразовательных учебных заведений и сделали заключение о целесообразности предоставления учебнику грифа «Рекомендовано Министерством образования и науки Украины»:*

*В. В. Вдовенко*, доцент кафедры математики Кировоградского государственного педагогического университета имени Владимира Винниченко, кандидат педагогических наук

*И. В. Мадей*, методист Козятинского городского методического кабинета Винницкой области, учитель-методист

*О. А. Барановская*, учитель Острожской общеобразовательной школы I–III ступеней № 1 Ровненской области, старший учитель

**Мерзляк А. Г.**
М52 Алгебра : учеб. для 8 кл. общеобразоват. учеб. заведений с обуч. на рус. яз. : пер. с укр. / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир. — Х. : Гимназия, 2016. — 256 с. : ил.
ISBN 978-966-474-281-5.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я721



ISBN 978-966-474-281-5
ISBN 978-966-474-273-0 (укр.)

# От авторов

## ДОРОГИЕ ВОСЬМИКЛАССНИКИ!

В этом учебном году вы продолжите изучение алгебры. Надеемся, что вы успели полюбить эту важную и красивую науку, а следовательно, с интересом будете овладевать новыми знаниями. Хочется верить, что этому будет способствовать учебник, который вы держите в руках.

Ознакомьтесь, пожалуйста, с его структурой.

Учебник разделен на три параграфа, каждый из которых состоит из пунктов. В пунктах изложен теоретический материал. Самые важные сведения выделены **жирным *шрифтом*** и *курсивом*.

Как правило, изложение теоретического материала завершается примерами решения задач. Эти записи можно рассматривать как один из возможных образцов оформления решения.

К каждому пункту подобраны задачи для самостоятельного решения, приступать к которым советуем только после усвоения теоретического материала. Среди заданий есть как простые и средние по сложности упражнения, так и трудные задачи (особенно отмеченные «звездочкой» (*)).

Свои знания можно проверить, решая задачи в тестовой форме из рубрики «Проверьте себя».

Каждый пункт завершается рубрикой «Учимся делать нестандартные шаги». В ней собраны задачи, для решения которых нужны не специальные алгебраические знания, а лишь здравый смысл, изобретательность и смекалка. Они помогут вам научиться принимать неожиданные и нестандартные решения не только в математике, но и в жизни.

Если после выполнения домашних заданий останется свободное время и вы захотите узнать больше, то рекомендуем обратиться к рубрике «Когда сделаны уроки». Материал, изложенный в ней, не простой. Но тем интереснее испытать свои силы!

Дерзайте! Желаем успеха!

## УЧИТЕЛЯМ

### УВАЖАЕМЫЕ КОЛЛЕГИ!

Мы надеемся, что этот учебник станет надежным помощником в вашем нелегком и благородном труде, и будем искренне рады, если он вам понравится.

В книге собран обширный и разнообразный дидактический материал. Однако за один учебный год все задачи решить невозможно, да в этом и нет никакой необходимости. Вместе с тем гораздо удобнее работать, когда есть большой запас задач. Это позволит реализовать принципы уровневой дифференциации и индивидуального подхода в обучении.

Материал рубрики «Когда сделаны уроки» можно использовать для организации работы математического кружка и факультативных занятий.

Желаем творческого вдохновения и терпения.

## Условные обозначения

$n^\circ$ — задания, соответствующие начальному и среднему уровням учебных достижений;

$n^*$ — задания, соответствующие достаточному уровню учебных достижений;

$n^{**}$ — задания, соответствующие высокому уровню учебных достижений;

$n^*$ — задачи для математических кружков и факультативов;

▲ — окончание доказательства теоремы, решения задачи;

задания, которые можно выполнять с помощью компьютера;

рубрика «Когда сделаны уроки».

**Зеленым** цветом отмечены номера задач, рекомендуемых для домашней работы, **синим** цветом — номера задач, которые с учетом индивидуальных особенностей учащихся класса (на усмотрение учителя) можно решать устно.

# § 1 РАЦИОНАЛЬНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

- В этом параграфе вы ознакомитесь с дробями, числитель и знаменатель которых — выражения с переменными; научитесь складывать, вычитать, умножать и делить такие дроби; ознакомитесь с уравнениями, составленными с помощью этих дробей.
- Вы узнаете, с помощью каких правил можно заменить данное уравнение более простым.
- Вы расширите свои представления о понятии «степень», научитесь возводить числа в степень с целым отрицательным показателем.
- Вы научитесь строить математические модели процессов, в которых увеличение (уменьшение) одной величины в несколько раз приводит к уменьшению (увеличению) другой величины в такое же количество раз.

## 1. Рациональные дроби

**Перед изучением этого пункта рекомендуем повторить содержание п. 1 на с. 231 и п. 6 на с. 233.**

В курсе алгебры 7 класса были рассмотрены целые выражения, то есть выражения, составленные из чисел и переменных с помощью действий сложения, вычитания, умножения и деления на отличное от нуля число.

Вот примеры целых выражений:

$$x - y,\ \frac{a+b}{5},\ m^2 + 2m + n^2,\ \frac{1}{3}x - 4,\ \frac{c}{4} + \frac{d}{7},\ x : 5,\ y,\ 7.$$

В курсе алгебры 8 класса мы рассмотрим **дробные выражения**.

Дробные выражения отличаются от целых тем, что они *содержат деление на выражение с переменными*.

Приведем примеры дробных выражений:

$$2x + \frac{a}{b},\ (x - y) : (x + y),\ \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}},\ \frac{5}{x}.$$

Целые и дробные выражения называют **рациональными выражениями**.

Если в рациональном выражении заменить переменные числами, то получим числовое выражение. Однако *эта замена возможна только тогда, когда она не приводит к делению на нуль.*

Например, выражение $2+\frac{a+2}{a-1}$ при $a = 1$ не имеет смысла, то есть числового значения этого выражения при $a = 1$ не существует. При всех других значениях $a$ это выражение имеет смысл.

**Определение. Допустимыми значениями переменных, входящих в рациональное выражение, называют все значения переменных, при которых это выражение имеет смысл.**

Например, в рассмотренном выше выражении допустимыми значениями переменной $a$ являются все числа, кроме 1.

Допустимыми значениями переменных, входящих в целое выражение, являются все числа.

Отдельным видом рационального выражения является **рациональная дробь**. Это дробь, числитель и знаменатель которой — многочлены[1]. Так, рациональные выражения

$$\frac{x}{7},\quad \frac{x^2-2xy}{x+y},\quad \frac{12}{a},\quad \frac{a+b}{5}$$

являются примерами рациональных дробей.

Отметим, что рациональная дробь может быть как целым выражением, так и дробным.

Знаменатель рациональной дроби не может быть **нулевым многочленом**, то есть многочленом, тождественно равным нулю.

Допустимыми значениями переменных, входящих в рациональную дробь, являются все те значения переменных, при которых значение знаменателя дроби не равно нулю.

Схема на рисунке 1 иллюстрирует связь между понятиями, которые рассматриваются в этом пункте.


**Рис. 1**

[1] Напомним, что числа и одночлены считают отдельными видами многочленов (см. п. 6 на с. 233–234).

**ПРИМЕР** Найдите допустимые значения переменной, входящей в выражение $\frac{1}{x}+\frac{3}{x-5}$.

*Решение*

Дробь $\frac{1}{x}$ имеет смысл при всех значениях $x$, кроме $x = 0$, а дробь $\frac{3}{x-5}$ имеет смысл при всех значениях $x$, кроме $x = 5$.

Следовательно, искомыми допустимыми значениями переменной являются все числа, отличные от 0 и 5. ▲

**?**

1. Чем отличаются дробные выражения от целых?
2. Как вместе называют целые и дробные выражения?
3. Какие значения переменных называют допустимыми?
4. Какие дроби называют рациональными?
5. Отдельным видом каких выражений являются рациональные дроби?
6. Какой многочлен не может быть знаменателем рациональной дроби?

## УПРАЖНЕНИЯ

**1.°** Какие из выражений $\frac{3a^2}{4b^3}$, $\frac{5x^2}{4}+\frac{x}{7}$, $\frac{8}{6n+1}$, $3a-\frac{b^2}{c^4}$, $\frac{t^2-6t+15}{2t}$, $\frac{x-2}{x+2}$, $\frac{1}{6}m^3n^5$, $(y-4)^3+\frac{1}{y}$, $\frac{m^2-3mn}{18}$ являются:

1) целыми выражениями;
2) дробными выражениями;
3) рациональными дробями?

**2.°** Чему равно значение дроби $\frac{c^2-4c}{2c+1}$, если:

1) $c = -3$; 2) $c = 0$?

**3.°** Найдите значение выражения $\frac{2m-n}{3m+2n}$, если:

1) $m = -1$, $n = 1$; 2) $m = 4$, $n = -5$.

**4.°** Чему равно значение выражения:

1) $\frac{a^2-1}{a-5}$ при $a = -4$; 2) $\frac{x+3}{y}-\frac{y}{x+2}$ при $x = -5$, $y = 6$?

**5.°** Найдите допустимые значения переменной, входящей в выражение:

1) $2x-5$;
2) $\frac{18}{m}$;
3) $\frac{9}{x-5}$;
4) $\frac{x-5}{9}$;
5) $\frac{2+y}{1+y}$;
6) $\frac{1}{x^2+4}$;
7) $\frac{5}{x^2-4}$;
8) $\frac{5}{|x|-4}$;
9) $\frac{2}{x-2}+\frac{3x}{x+1}$;
10) $\frac{x+4}{x(x-6)}$;
11) $\frac{x}{|x|+1}$;
12) $\frac{x^2}{(x-3)(x+5)}$.

**6.°** При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

1) $\frac{9}{y}$;
2) $\frac{x+7}{x+9}$;
3) $\frac{m-1}{m^2-9}$;
4) $\frac{x}{|x|-3}$;
5) $\frac{4}{x-8}+\frac{1}{x-1}$;
6) $\frac{2x-3}{(x+2)(x-10)}$?

**7.•** Запишите рациональную дробь, которая содержит переменную $x$ и имеет смысл при всех значениях $x$, кроме:
1) $x=7$; 2) $x=-1$; 3) $x=0$ и $x=4$.

**8.•** Запишите рациональную дробь, содержащую переменную $y$, допустимыми значениями которой являются:
1) все числа, кроме 5;
2) все числа, кроме −2 и 0;
3) все числа, кроме 3, −3 и 6;
4) все числа.

**9.•** Автомобиль проехал по шоссе $a$ км со скоростью 75 км/ч и по грунтовой дороге $b$ км со скоростью 40 км/ч. За какое время автомобиль проехал весь путь? Составьте выражение и найдите его значение при $a=150$, $b=20$.

**10.•** Ученик купил тетради по 8 грн, заплатив за них $m$ грн, и по 14 грн, заплатив за них $n$ грн. Сколько тетрадей купил ученик? Составьте выражение и найдите его значение при $m=24$, $n=56$.

**11.•** Докажите, что при всех допустимых значениях переменной $x$ значение дроби:

1) $\frac{1}{x^2}$ положительное;
2) $\frac{x^2+1}{6x-9-x^2}$ отрицательное.

**12.•** Докажите, что при всех допустимых значениях переменной $x$ значение дроби:

1) $\frac{-x^2}{x^2+5}$ неположительное;
2) $\frac{x^2+4x+4}{x^2-2x+1}$ неотрицательное.

**13.**° Известно, что $5x - 15y = 1$. Найдите значение выражения:

1) $x - 3y$;  3) $\dfrac{18y - 6x}{9}$;

2) $\dfrac{8}{2x - 6y}$;  4) $\dfrac{1}{x^2 - 6xy + 9y^2}$.

**14.**° Известно, что $4a + 8b = 10$. Найдите значение выражения:

1) $2b + a$;  2) $\dfrac{5}{a + 2b}$;  3) $\dfrac{a^2 + 4ab + 4b^2}{2a + 4b}$.

**15.**•• Найдите область определения функции:

1) $y = \dfrac{1}{4 - \dfrac{4}{x}}$;  2) $y = \dfrac{1}{x - \dfrac{1}{x}}$.

**16.**•• При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

1) $\dfrac{x}{x - \dfrac{9}{x}}$;  2) $\dfrac{10}{2 + \dfrac{6}{x}}$?

## ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

**17.** Сократите дробь:

1) $\dfrac{5}{15}$;  2) $\dfrac{12}{18}$;  3) $\dfrac{27}{45}$;  4) $\dfrac{30}{48}$.

**18.** Приведите дробь:

1) $\dfrac{3}{7}$ к знаменателю 14;  2) $\dfrac{8}{15}$ к знаменателю 60.

**19.** Представьте в виде степени выражение:

1) $a^5a^3$;  2) $(a^5)^3$;  3) $a^5 : a^3$;  4) $(a^3)^4 : (a^2)^3$.

**20.** Разложите на множители:

1) $6a - 15b$;  5) $a^6 + a^2$;

2) $2a + ab$;  6) $12m^2n - 4mn$;

3) $7am + 7bn$;  7) $2x^2 - 4x^3 + 10x^4$;

4) $4x^2 - 12xy$;  8) $10a^3b^2 - 15a^2b + 25ab^2$.

**21.** Представьте в виде произведения выражение:

1) $ab - ac + bd - cd$;  3) $a^5 + a^3 + 2a^2 + 2$;

2) $3m + 3n - mx - nx$;  4) $8a^2b - 2a^2 - 4b^2 + b$.

**22.** Представьте трехчлен в виде квадрата двучлена:

1) $a^2 - 8a + 16$;  3) $40xy + 16x^2 + 25y^2$;

2) $9x^2 + 6x + 1$;  4) $a^8 - 4a^4b + 4b^2$.

**23.** Разложите на множители:

1) $x^2 - 9$;
2) $25 - 4y^2$;
3) $36m^2 - 49n^2$;
4) $a^2b^2 - 81$;
5) $100m^6 - 1$;
6) $a^{10} - b^6$;
7) $c^3 - d^3$;
8) $a^3 + 8$;
9) $27m^6 - n^9$.

**24.** Разложите на множители:

1) $7a^2 - 7$;
2) $3b^3 - 3b$;
3) $2x^3 - 2xy^2$;
4) $-8a^5 + 8a^3 - 2a$;
5) $x - 4y + x^2 - 16y^2$;
6) $ab^6 - ab^4 - b^6 + b^4$.

**25.** Какое из равенств является тождеством:

1) $3x^2 - 36xy + 108y^2 = 3(x - 6y)^2$;
2) $4m^3 - 500n^6 = 4(m - 5n)(m - 5mn + 25n^2)$?

**Повторите содержание п. 2 на с. 231.**

## УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

**26.** Даны два числа: $a = \underbrace{44...4}_{m \text{ цифр}}$, $b = \underbrace{33...3}_{n \text{ цифр}}$. Можно ли подобрать такие $m$ и $n$, чтобы:

1) число $a$ было делителем числа $b$;
2) число $b$ было делителем числа $a$?

# 2. Основное свойство рациональной дроби

Равенство $3a - 1 + 2a + 5 = 5a + 4$ является тождеством, так как оно выполняется при любых значениях $a$.

Равенство $\frac{3a-1+2a+5}{a+1} = \frac{5a+4}{a+1}$ также естественно считать тождеством. Но оно выполняется не при любых значениях $a$. При $a = -1$ рациональные дроби, входящие в данное равенство, не имеют смысла.

Уточним принятые в 7 классе определение тождественно равных выражений и определение тождества.

**Определение.** **Выражения, соответствующие значения которых равны при любых допустимых значениях входящих в них переменных, называют *тождественно равными*.**

**Определение.** **Равенство, которое выполняется при любых допустимых значениях входящих в него переменных, называют *тождеством*.**

Например, равенство $\frac{a-2}{a-2}=1$ является тождеством, поскольку оно выполняется при всех допустимых значениях $a$, то есть при всех $a$, кроме $a = 2$.

В 7 классе мы рассматривали тождественные преобразования целых выражений. Теперь рассмотрим тождественные преобразования дробных выражений.

Как вы знаете, основное свойство отношения выражается следующим равенством:

$$\frac{a}{b}=\frac{am}{bm},$$

где $a$, $b$ и $m$ — некоторые числа, причем $b \neq 0$ и $m \neq 0$.

Рациональные дроби обладают свойством, аналогичным основному свойству отношения:

***если числитель и знаменатель рациональной дроби умножить на один и тот же ненулевой многочлен, то получим дробь, тождественно равную данной.***

Это свойство называют **основным свойством рациональной дроби** и записывают:

$$\frac{A}{B}=\frac{A \cdot C}{B \cdot C},$$

где $A$, $B$ и $C$ — многочлены, причем многочлены $B$ и $C$ ненулевые.

В соответствии с этим свойством выражение $\frac{A \cdot C}{B \cdot C}$ можно заменить на тождественно равную ему дробь $\frac{A}{B}$. Такое тождественное преобразование называют **сокращением дроби** на множитель $C$.

**ПРИМЕР 1** Сократите дробь: 1) $\frac{6a^3b^2}{24a^2b^4}$; 2) $\frac{3x+15y}{3x}$; 3) $\frac{y^2+4y+4}{y^2+2y}$.

*Решение.* 1) Одночлены $6a^3b^2$ и $24a^2b^4$ имеют общий множитель $6a^2b^2$. Тогда можно записать:

$$\frac{6a^3b^2}{24a^2b^4}=\frac{a \cdot 6a^2b^2}{4b^2 \cdot 6a^2b^2}=\frac{a}{4b^2}.$$

2) Разложим числитель данной дроби на множители:

$$\frac{3x+15y}{3x}=\frac{3(x+5y)}{3x}.$$

Следовательно, числитель и знаменатель данной дроби имеют общий множитель 3, сократив на который получаем:

$$\frac{3(x+5y)}{3x}=\frac{x+5y}{x}.$$

3) Разложив предварительно числитель и знаменатель данной дроби на множители и сократив на общий множитель $y+2$, получаем:

$$\frac{y^2+4y+4}{y^2+2y}=\frac{(y+2)^2}{y(y+2)}=\frac{y+2}{y}. \ \blacktriangle$$

Из основного свойства дроби следует, что

$$\frac{A}{B}=\frac{-A}{-B} \quad \text{и} \quad \frac{-A}{B}=\frac{A}{-B}.$$

Каждую из дробей $\frac{-A}{B}$ и $\frac{A}{-B}$ можно записать в виде выражения $-\frac{A}{B}$, то есть

$$\frac{-A}{B}=\frac{A}{-B}=-\frac{A}{B}.$$

**ПРИМЕР 2** Сократите дробь $\frac{4a-20}{5a-a^2}$.

*Решение.* Имеем:

$$\frac{4a-20}{5a-a^2}=\frac{4(a-5)}{a(5-a)}=\frac{4(a-5)}{-a(a-5)}=-\frac{4}{a}. \ \blacktriangle$$

**ПРИМЕР 3** Приведите дробь:

1) $\frac{a^2}{5bc^3}$ к знаменателю $15ab^3c^5$;

2) $\frac{a}{a+2b}$ к знаменателю $a^2-4b^2$;

3) $\frac{a-b}{2a-3b}$ к знаменателю $3b-2a$.

*Решение.* 1) Поскольку $15ab^3c^5=5bc^3\cdot 3ab^2c^2$, то новый знаменатель отличается от знаменателя данной дроби множителем $3ab^2c^2$. Следовательно, числитель и знаменатель данной дроби надо умножить на **дополнительный множитель** $3ab^2c^2$. Имеем:

$$\frac{a^2}{5bc^3}=\frac{a^2\cdot 3ab^2c^2}{5bc^3\cdot 3ab^2c^2}=\frac{3a^3b^2c^2}{15ab^3c^5}.$$

2) Запишем: $\frac{a}{a+2b}=\frac{a(a-2b)}{(a+2b)(a-2b)}=\frac{a^2-2ab}{a^2-4b^2}$.

3) Умножив числитель и знаменатель данной дроби на число $-1$, получаем:

$$\frac{a-b}{2a-3b}=\frac{(a-b)\cdot(-1)}{(2a-3b)\cdot(-1)}=\frac{b-a}{3b-2a}. \ \blacktriangle$$

**ПРИМЕР 4** Приведите к общему знаменателю дроби:

1) $\frac{2m}{9a^2b^6}$ и $\frac{5n^2}{6a^4b^3}$; 2) $\frac{1}{a+b}$ и $\frac{1}{a-b}$; 3) $\frac{4a^2}{a^2-36}$ и $\frac{6}{a^2+6a}$.

*Решение.* 1) Можно принять за общий знаменатель данных дробей произведение их знаменателей, равное $54a^6b^9$. Однако удобнее в качестве общего знаменателя взять одночлен $18a^4b^6$, сконструированный таким образом: его коэффициент 18 является наименьшим общим кратным коэффициентов 9 и 6 знаменателей данных дробей, а каждая из переменных $a$ и $b$ взята в степени с наибольшим показателем степени из тех, с которыми она входит в знаменатели данных дробей.

Поскольку $18a^4b^6 = 9a^2b^6 \cdot 2a^2$, то дополнительным множителем для дроби $\frac{2m}{9a^2b^6}$ является одночлен $2a^2$. Учитывая, что $18a^4b^6 = 6a^4b^3 \cdot 3b^3$, получаем, что дополнительным множителем для дроби $\frac{5n^2}{6a^4b^3}$ является одночлен $3b^3$.

Следовательно, получаем:

$$\frac{2m}{9a^2b^6} = \frac{2m \cdot 2a^2}{9a^2b^6 \cdot 2a^2} = \frac{4a^2m}{18a^4b^6};$$

$$\frac{5n^2}{6a^4b^3} = \frac{5n^2 \cdot 3b^3}{6a^4b^3 \cdot 3b^3} = \frac{15b^3n^2}{18a^4b^6}.$$

2) Здесь общий знаменатель данных дробей равен произведению их знаменателей. Имеем:

$$\frac{1}{a+b} = \frac{a-b}{(a+b)(a-b)} = \frac{a-b}{a^2-b^2};$$

$$\frac{1}{a-b} = \frac{a+b}{(a-b)(a+b)} = \frac{a+b}{a^2-b^2}.$$

3) Чтобы найти общий знаменатель рациональных дробей, бывает полезным предварительно разложить их знаменатели на множители:

$$a^2 - 36 = (a+6)(a-6), \qquad a^2 + 6a = a(a+6).$$

Следовательно, общим знаменателем данных дробей может служить выражение $a(a+6)(a-6)$.

Тогда

$$\frac{4a^2}{a^2-36} = \frac{{}^{a/}4a^2}{(a+6)(a-6)} = \frac{4a^3}{a(a+6)(a-6)} = \frac{4a^3}{a^3-36a};$$

$$\frac{6}{a^2+6a} = \frac{{}^{a-6/}6}{a(a+6)} = \frac{6(a-6)}{a(a+6)(a-6)} = \frac{6a-36}{a^3-36a}. \blacktriangle$$

**ПРИМЕР 5** Постройте график функции $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

*Решение.* Данная функция определена при всех значениях $x$, кроме 1. Имеем:

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1,$$

то есть $y = x + 1$, где $x \neq 1$.

Следовательно, искомым графиком являются все точки прямой $y = x + 1$, за исключением одной точки, абсцисса которой равна 1 (рис. 2). ▲

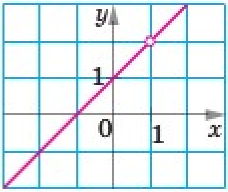



Рис. 2

**ПРИМЕР 6** Для каждого значения $a$ решите уравнение $(a^2 - 9)\,x = a + 3$.

*Решение.* Запишем данное уравнение в виде $(a + 3)(a - 3)\,x = a + 3$ и рассмотрим три случая.

1) $a = 3$.

Тогда получаем уравнение $0x = 6$, которое не имеет корней.

2) $a = -3$.

В этом случае получаем уравнение $0x = 0$, корнем которого является любое число.

3) $a \neq 3$ и $a \neq -3$.

Тогда $x = \frac{a+3}{(a+3)(a-3)} = \frac{1}{a-3}$.

*Ответ*: если $a = 3$, то уравнение не имеет корней; если $a = -3$, то корнем является любое число; если $a \neq 3$ и $a \neq -3$, то $x = \frac{1}{a-3}$. ▲

?

1. Какие выражения называют тождественно равными?
2. Что называют тождеством?
3. Сформулируйте основное свойство рациональной дроби.

## УПРАЖНЕНИЯ

**27.°** Какому из приведенных выражений тождественно равна дробь $\frac{6a^2}{24a}$:

1) $\frac{a^2}{4}$; 2) $\frac{a}{4}$; 3) $\frac{12a^3}{48a}$; 4) $\frac{3a^4}{12a^2}$?

**28.°** Является ли тождеством равенство:

1) $\frac{3m^2}{7m}=\frac{3m}{7}$;
2) $\frac{4x^8}{16x^4}=\frac{x^2}{4}$;
3) $\frac{2b}{5c^3}=\frac{8b}{20c^5}$;
4) $\frac{8m^2}{9n}=\frac{8m^5}{9nm^3}$?

**29.°** Сократите дробь:

1) $\frac{14a^3}{21a}$;
2) $\frac{8b^3c^2}{12bc^3}$;
3) $\frac{5x}{20x}$;
4) $\frac{24x^2y^2}{32xy}$;
5) $\frac{4abc}{16ab^4}$;
6) $\frac{56m^5n^7}{42m^5n^{10}}$;
7) $\frac{-10n^{10}}{5n^4}$;
8) $\frac{3p^4q^6}{-9p^8q^7}$.

**30.°** Представьте частное в виде дроби и сократите полученную дробь:

1) $6a:(18a^5)$;
2) $16b^7:(48b^4)$;
3) $35a^3b^6:(-49a^6b^8)$.

**31.°** Сократите дробь:

1) $\frac{3x}{21y}$;
2) $\frac{5x^2}{6x}$;
3) $\frac{5c^4}{10c^5}$;
4) $\frac{2m^4}{m^3}$;
5) $\frac{16ab^4}{40ab^3}$;
6) $\frac{63x^5y^4}{42x^4y^5}$;
7) $\frac{12a^3}{-42a^2}$;
8) $\frac{-13a^5b^5}{26a^4b^3}$.

**32.°** Упростите выражение:

1) $\frac{-a}{-b}$;
2) $-\frac{-a}{b}$;
3) $-\frac{a}{-b}$;
4) $-\frac{-a}{-b}$.

**33.°** Восстановите равенства:

1) $\frac{a}{3}=\frac{\quad}{6a}=\frac{\quad}{9a^3}=\frac{\quad}{5b}=\frac{4a^2c^3}{\quad}$;
2) $\frac{m}{n}=\frac{4m}{\quad}=\frac{\quad}{2n^2}=\frac{\quad}{mnp}=\frac{3m^4n^3}{\quad}$.

**34.°** Приведите дробь:

1) $\frac{a}{b^3}$ к знаменателю $b^5$;
2) $\frac{m}{9n}$ к знаменателю $27n^4$;
3) $\frac{6}{7x^2y}$ к знаменателю $35x^3y^2$;
4) $\frac{5k}{6p^5}$ к знаменателю $24p^9c$.

**35.°** Приведите дробь:

1) $\frac{x}{y^2}$ к знаменателю $y^8$;
2) $\frac{a}{3b}$ к знаменателю $6b^3$;
3) $\frac{9}{4m^2n}$ к знаменателю $12m^3n^2$;
4) $\frac{11c}{15d^6}$ к знаменателю $30bd^7$.

**36.°** Сократите дробь:

1) $\frac{a(x+2)}{b(x+2)}$; 5) $\frac{7x-21y}{5x-15y}$; 9) $\frac{y^2-25}{10+2y}$;

2) $\frac{4(a-6)^2}{(a-6)^3}$; 6) $\frac{4a-20b}{12ab}$; 10) $\frac{a^2+4a+4}{9a+18}$;

3) $\frac{c^3(c-4)^5}{c^6(c-4)^3}$; 7) $\frac{6x+12}{6x}$; 11) $\frac{c^2-6c+9}{c^2-9}$;

4) $\frac{2a+2b}{7(a+b)}$; 8) $\frac{a-5b}{a^2-5ab}$; 12) $\frac{m^3+1}{m^2-m+1}$.

**37.°** Сократите дробь:

1) $\frac{a-b}{2(b-a)}$; 3) $\frac{m^2-5mn}{15n-3m}$; 5) $\frac{x^2-25}{5x^2-x^3}$;

2) $\frac{3x-6y}{4y-2x}$; 4) $\frac{7a^4-a^3b}{b^4-7ab^3}$; 6) $\frac{y^2-12y+36}{36-y^2}$.

**38.°** Сократите дробь:

1) $\frac{3m-3n}{7m-7n}$; 4) $\frac{x^2-49}{6x+42}$; 7) $\frac{b^5-b^4}{b^5-b^6}$;

2) $\frac{5a+25b}{2a^2+10ab}$; 5) $\frac{12a^2-6a}{3-6a}$; 8) $\frac{7m^2+7m+7}{m^3-1}$;

3) $\frac{4x-16y}{16y}$; 6) $\frac{9b^2-1}{9b^2+6b+1}$; 9) $\frac{64-x^2}{3x^2-24x}$.

**39.°** Приведите дробь:

1) $\frac{a}{a+2}$ к знаменателю $4a+8$;

2) $\frac{m}{m-3n}$ к знаменателю $m^2-9n^2$;

3) $\frac{x}{2x-y}$ к знаменателю $7y-14x$;

4) $\frac{5b}{2a+3b}$ к знаменателю $4a^2+12ab+9b^2$;

5) $\frac{x+1}{x^2+x+1}$ к знаменателю $x^3-1$.

**40.°** Представьте выражение $x-5y$ в виде дроби со знаменателем:
1) $2$; 2) $x$; 3) $4y^3$; 4) $x^2-25y^2$.

**41.°** Приведите дробь $\frac{6}{b-4}$ к знаменателю:

1) $5b-20$; 2) $12-3b$; 3) $b^2-4b$; 4) $b^2-16$.

**42.°** Представьте данные дроби в виде дробей с одинаковыми знаменателями:

1) $\frac{1}{8ab}$ и $\frac{1}{2a^3}$;
2) $\frac{3x}{7m^3n^3}$ и $\frac{4y}{3m^2n^4}$;
3) $\frac{a+b}{a-b}$ и $\frac{2}{a^2-b^2}$;
4) $\frac{3d}{m-n}$ и $\frac{8p}{(m-n)^2}$;
5) $\frac{x}{2x+1}$ и $\frac{x}{3x-2}$;
6) $\frac{a-b}{3a+3b}$ и $\frac{a}{a^2-b^2}$;
7) $\frac{3a}{4a-4}$ и $\frac{2a}{5-5a}$;
8) $\frac{7a}{b-3}$ и $\frac{c}{9-b^2}$.

**43.°** Приведите к общему знаменателю дроби:

1) $\frac{4}{15x^2y^2}$ и $\frac{1}{10x^3y}$;
2) $\frac{c}{6a^4b^5}$ и $\frac{d}{9ab^2}$;
3) $\frac{x}{y-5}$ и $\frac{z}{y^2-25}$;
4) $\frac{m+n}{m^2-mn}$ и $\frac{2m-3n}{m^2-n^2}$;
5) $\frac{x+1}{x^2-xy}$ и $\frac{y-1}{xy-y^2}$;
6) $\frac{6a}{a-2b}$ и $\frac{3a}{a+b}$;
7) $\frac{1+c^2}{c^2-16}$ и $\frac{c}{4-c}$;
8) $\frac{2m+9}{m^2+5m+25}$ и $\frac{m}{m-5}$.

**44.•** Сократите дробь:

1) $\frac{(3a+3b)^2}{a+b}$;
2) $\frac{(6x-18y)^2}{x^2-9y^2}$;
3) $\frac{xy+x-5y-5}{4y+4}$;
4) $\frac{a^2-ab+2b-2a}{a^2-4a+4}$.

**45.•** Сократите дробь:

1) $\frac{2m^2-72n^2}{(4m+24n)^2}$;
2) $\frac{a^3-8}{ab-a-2b+2}$;
3) $\frac{a^3+2a^2b+ab^2}{a^3-ab^2}$.

**46.•** Найдите значение дроби, предварительно сократив ее:

1) $\frac{15a^2+10ab}{3ab+2b^2}$, если $a=-2$, $b=0{,}4$;
2) $\frac{9b^2-4c^2}{12b^2c-8bc^2}$, если $b=\frac{1}{3}$, $c=-6$;
3) $\frac{36x^2-12xy+y^2}{y^2-36x^2}$, если $x=1{,}2$, $y=-3$;
4) $\frac{a^8-a^6}{a^9+a^8}$, если $a=-0{,}1$.

**47.*** Найдите значение выражения:

1) $\dfrac{16x^2-4y^2}{6x-3y}$ при $x = 2{,}5$, $y = -2$;

2) $\dfrac{49c^2-9}{49c^2+42c+9}$ при $c = -4$.

**48.*** Приведите к общему знаменателю дроби:

1) $\dfrac{2p}{5p-15}$ и $\dfrac{1}{p^3-27}$;

2) $\dfrac{3a+1}{9a^2-6a+1}$ и $\dfrac{a-2}{9a^2-1}$;

3) $\dfrac{a}{a^2-7a}$ и $\dfrac{a+3}{a^2-14a+49}$;

4) $\dfrac{2x}{x^2-1}$, $\dfrac{3x}{x^2-2x+1}$ и $\dfrac{4}{x^2+2x+1}$;

5) $\dfrac{a^2}{a^2-ab-ac+bc}$, $\dfrac{b}{2a-2b}$ и $\dfrac{ab}{4a-4c}$.

**49.*** Запишите в виде дробей с одинаковыми знаменателями:

1) $\dfrac{3a}{3a-2}$, $\dfrac{a}{9a+6}$ и $\dfrac{a^2}{9a^2b-4b}$;

2) $\dfrac{1}{a-5b}$, $\dfrac{1}{a^2+7ac}$ и $\dfrac{1}{a^2+7ac-5ab-35bc}$.

**50.**** Найдите значение выражения $\dfrac{2xy-y^2}{3xy+x^2}$, если $\dfrac{x}{y}=2$.

**51.**** Найдите значение выражения $\dfrac{4a^2-ab}{ab+14b^2}$, если $\dfrac{a}{b}=5$.

**52.**** Известно, что $2a - 6b = 1$. Найдите значение выражения:

1) $\dfrac{8}{a-3b}$;

2) $\dfrac{a^2-9b^2}{0{,}5a+1{,}5b}$.

**53.**** Найдите значение выражения $\dfrac{2m-1{,}5n}{32m^2-18n^2}$, если $4m + 3n = 8$.

**54.**** Существует ли такое значение $a$, при котором дробь $\dfrac{a^3-a^2-a+1}{a^3+a^2+a+1}$ принимает отрицательное значение?

**55.**** Постройте график функции:

1) $y=\dfrac{x^2-4}{x+2}$;

2) $y=\dfrac{x-3}{3-x}$;

3) $y=\dfrac{x^2-10x+25}{x-5}-\dfrac{2x^2-4x}{x}$;

4) $y=\dfrac{2}{x+4}-\dfrac{2}{x+4}$.

**56.**** Постройте график функции:

1) $y=\dfrac{x^2-8x+16}{x-4}$; 2) $y=x-\dfrac{x}{x}$; 3) $y=\dfrac{x^2-3x}{x}-\dfrac{2x^2-2}{x^2-1}$.

**57.**** Постройте график функции:

1) $y=\dfrac{|x|}{x}$; 2) $y=\dfrac{x^2-1}{|x|-1}$.

**58.**** Решите уравнение:

1) $\dfrac{x+1}{x+1}=1$; 2) $\dfrac{x^2-25}{x-5}=10$; 3) $\dfrac{x+6}{|x|-6}=0$.

**59.**** Решите уравнение:

1) $\dfrac{x^2-16}{x+4}=-8$; 2) $\dfrac{|x|-7}{x-7}=0$.

**60.*** Для каждого значения $a$ решите уравнение:

1) $ax = 1$;
2) $ax = a$;
3) $(a - 6)\,x = a^2 - 12a + 36$;
4) $(a^2 - 4)\,x = a - 2$.

**61.*** Для каждого значения $a$ решите уравнение:

1) $(a + 3)\,x = 3$; 2) $(a^2 - 9a)\,x = a^2 - 18a + 81$.

## УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

**62.** Упростите выражение:

1) $(x + 2)(x - 9) - 3x(3 - 2x)$;
2) $(a + 5)(a - 2) + (a + 4)(a - 5)$;
3) $(y - 8)(2y + 1) - (3y + 1)(y - 6)$;
4) $(2x - 3y)(2x + 3y) + (3x + 2y)(3x - 2y)$;
5) $(x + 1)^2 - (x - 3)(x + 3)$;
6) $(y - 4)(y + 3) - (y - 6)^2$.

**63.** Постройте график функции:

1) $y = 2$; 2) $y = 2x$; 3) $y = 2x - 1$.

**64.** Какое наименьшее значение и при каких значениях $a$ и $b$ принимает выражение $(a - 2)(a + 2) + 4b(b - a)$?

**65.** Расстояние от села Вишневое до железнодорожной станции на 14 км меньше расстояния от села Яблоневое до той же станции. Время, за которое автобус преодолевает расстояние от села Вишневое до станции, составляет 45 мин, а время, за которое легковой автомобиль проезжает от села Яблоневое до станции, на 5 мин больше, причем скорость автомобиля на 12 км/ч больше скорости автобуса. Найдите скорость автобуса и скорость легкового автомобиля.

## ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

**66.** Выполните действия:

1) $\frac{7}{18}+\frac{5}{18}$; 2) $\frac{9}{16}+\frac{7}{16}$; 3) $\frac{23}{32}-\frac{15}{32}$; 4) $4-1\frac{3}{11}$.

## УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

**67.** На сторонах квадрата записаны четыре натуральных числа. В каждой вершине квадрата записано число, равное произведению чисел, записанных на сторонах, для которых эта вершина является общей. Сумма чисел, записанных в вершинах, равна 55. Найдите сумму чисел, записанных на сторонах квадрата.

# 3. Сложение и вычитание рациональных дробей с одинаковыми знаменателями

Вы знаете правила сложения и вычитания обыкновенных дробей с одинаковыми знаменателями. Их можно выразить такими равенствами:

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}, \quad \frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}.$$

По таким же правилам складывают и вычитают рациональные дроби с одинаковыми знаменателями.

***Чтобы сложить рациональные дроби с одинаковыми знаменателями, нужно сложить их числители, а знаменатель оставить тот же.***

***Чтобы вычесть рациональные дроби с одинаковыми знаменателями, нужно из числителя первой дроби вычесть числитель второй дроби, а знаменатель оставить тот же.***

**ПРИМЕР 1** Выполните вычитание:

1) $\frac{7x-5}{8x^2}-\frac{3x-5}{8x^2}$; 2) $\frac{y^2+2y}{y^2-25}-\frac{12y-25}{y^2-25}$; 3) $\frac{4}{2a-1}-\frac{2a-3}{1-2a}$.

*Решение.*

1) $\frac{7x-5}{8x^2}-\frac{3x-5}{8x^2}=\frac{7x-5-(3x-5)}{8x^2}=\frac{7x-5-3x+5}{8x^2}=\frac{4x}{8x^2}=\frac{1}{2x}$.

2) $\frac{y^2+2y}{y^2-25}-\frac{12y-25}{y^2-25}=\frac{y^2+2y-(12y-25)}{y^2-25}=\frac{y^2+2y-12y+25}{y^2-25}=$

$$=\frac{y^2-10y+25}{y^2-25}=\frac{(y-5)^2}{(y+5)(y-5)}=\frac{y-5}{y+5}.$$

3) $\frac{4}{2a-1}-\frac{2a-3}{1-2a}=\frac{4}{2a-1}-\frac{2a-3}{-(2a-1)}=\frac{4}{2a-1}+\frac{2a-3}{2a-1}=\frac{4+2a-3}{2a-1}=\frac{2a+1}{2a-1}.$ ▲

**ПРИМЕР 2** Известно, что $\frac{m}{n}=-3$. Найдите значение выражения $\frac{2m+n}{m}$.

*Решение.* Представим данную дробь в виде суммы целого и дробного выражений:

$$\frac{2m+n}{m}=\frac{2m}{m}+\frac{n}{m}=2+\frac{n}{m}.$$

Если $\frac{m}{n}=-3$, то $\frac{n}{m}=-\frac{1}{3}$. Следовательно,

$$\frac{2m+n}{m}=2+\frac{n}{m}=2-\frac{1}{3}=1\frac{2}{3}.$$ ▲

**ПРИМЕР 3** Найдите все натуральные значения $n$, при которых значение выражения $\frac{2n^2+3n-15}{n}$ является целым числом.

*Решение.* Представим данную дробь в виде разности целого и дробного выражений:

$$\frac{2n^2+3n-15}{n}=\frac{2n^2}{n}+\frac{3n}{n}-\frac{15}{n}=2n+3-\frac{15}{n}.$$

Выражение $2n+3$ принимает натуральные значения при любом натуральном $n$. Поэтому выражение $2n+3-\frac{15}{n}$ принимает целые значения, если значения выражения $\frac{15}{n}$ являются целыми числами. Это возможно только при следующих натуральных значениях $n$: 1, 3, 5, 15.

*Ответ*: $n = 1$, или $n = 3$, или $n = 5$, или $n = 15$. ▲

?

1. Как сложить рациональные дроби с одинаковыми знаменателями?
2. Как вычесть рациональные дроби с одинаковыми знаменателями?

## УПРАЖНЕНИЯ

**68.**° Выполните действия:

1) $\frac{x}{6}+\frac{y}{6}$;
2) $\frac{a}{3}-\frac{b}{3}$;
3) $\frac{m}{n}+\frac{4m}{n}$;
4) $\frac{6c}{d}-\frac{2c}{d}$;
5) $\frac{m+n}{6}-\frac{m-2n}{6}$;
6) $\frac{2a-3b}{6ab}+\frac{9b-2a}{6ab}$;
7) $-\frac{5c+4d}{cd}+\frac{4d+9c}{cd}$;
8) $\frac{8m+3}{10m^2}-\frac{2m+3}{10m^2}$.

**69.**° Представьте в виде дроби выражение:

1) $\frac{7k}{18p}-\frac{4k}{18p}$;
2) $\frac{a-b}{2b}-\frac{a}{2b}$;
3) $-\frac{a-12b}{27a}+\frac{a+15b}{27a}$;
4) $\frac{x-7y}{xy}-\frac{x-4y}{xy}$;
5) $\frac{10a+6b}{11a^3}-\frac{6b-a}{11a^3}$;
6) $\frac{x^2-xy}{x^2y}+\frac{2xy-3x^2}{x^2y}$.

**70.**° Упростите выражение:

1) $\frac{a^2}{a+3}-\frac{9}{a+3}$;
2) $\frac{t}{t^2-16}-\frac{4}{t^2-16}$;
3) $\frac{m^2}{(m-5)^2}-\frac{25}{(m-5)^2}$;
4) $\frac{5x+9}{x^2-1}-\frac{4x+8}{x^2-1}$;
5) $\frac{b^2}{b+10}+\frac{20b+100}{b+10}$;
6) $\frac{c^2}{c-7}-\frac{14c-49}{c-7}$.

**71.**° Упростите выражение:

1) $\frac{c^2}{c-9}-\frac{81}{c-9}$;
2) $\frac{a^2}{(a-6)^2}-\frac{36}{(a-6)^2}$;
3) $\frac{3x+5}{x^2-4}-\frac{2x+7}{x^2-4}$;
4) $\frac{y^2}{y-2}-\frac{4y-4}{y-2}$.

**72.**° Выполните действия:

1) $\frac{a+b}{c-7}+\frac{a}{7-c}$;
2) $\frac{5m}{m-n}+\frac{5n}{n-m}$;
3) $\frac{2x-4y}{x-3y}-\frac{4x-14y}{3y-x}$;
4) $\frac{81b^2}{9b-a}+\frac{a^2}{a-9b}$;
5) $\frac{t^2}{3t-6}+\frac{4}{6-3t}$;
6) $\frac{y^2}{y-1}-\frac{1-2y}{1-y}$.

**73.°** 1) $\frac{x}{y-1}+\frac{2}{1-y}$; 3) $\frac{3m+2n}{2m-3n}-\frac{m-8n}{3n-2m}$;

2) $\frac{3c}{c-d}+\frac{3d}{d-c}$; 4) $\frac{b^2}{2b-14}+\frac{49}{14-2b}$.

**74.**• Найдите значение выражения:

1) $\frac{a^2-48}{a-8}-\frac{16}{a-8}$ при $a=32$; 2) $\frac{c^2+3c+7}{c^3-8}+\frac{c+3}{8-c^3}$ при $c=-3$.

**75.**• Найдите значение выражения:

1) $\frac{5x+3}{x^2-16}+\frac{6x-1}{16-x^2}$ при $x=-4{,}1$; 2) $\frac{a^2+a}{a^2-9}-\frac{7a-9}{a^2-9}$ при $a=7$.

**76.**• Упростите выражение:

1) $\frac{5n-1}{20n}-\frac{7n-8}{20n}-\frac{8n+7}{20n}$; 3) $\frac{3k}{k^3-1}+\frac{4k+1}{1-k^3}+\frac{k^2}{1-k^3}$.

2) $\frac{9m+2}{m^2-4}-\frac{m-9}{4-m^2}+\frac{1-7m}{m^2-4}$;

**77.**• Упростите выражение:

1) $\frac{6a-1}{16a-8}+\frac{4a-7}{16a-8}+\frac{-2a-2}{8-16a}$;

2) $\frac{2a^2+12a}{a^2-25}+\frac{8a-9}{25-a^2}-\frac{a^2+14a-16}{a^2-25}$.

**78.**• Представьте в виде дроби выражение:

1) $\frac{15-8a}{(a-1)^2}-\frac{14-7a}{(1-a)^2}$; 3) $\frac{m^2-8n}{(m-2)(n-5)}-\frac{2m-8n}{(2-m)(5-n)}$.

2) $\frac{3b^2+12}{(b-2)^3}+\frac{12b}{(2-b)^3}$;

**79.**• Упростите выражение:

1) $\frac{x^2-16x}{(x-7)^4}+\frac{2x+49}{(7-x)^4}$; 2) $\frac{y^2+y}{(y-6)(y+2)}+\frac{y+36}{(6-y)(2+y)}$.

**80.**• Докажите тождество:

1) $\frac{(a+b)^2}{4ab}-\frac{(a-b)^2}{4ab}=1$; 2) $\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}+\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2}=2$.

**81.**• Докажите, что при всех допустимых значениях переменной $x$ значение выражения $\frac{12x-25}{20x-15}+\frac{8x+10}{20x-15}$ не зависит от значения $x$.

**82.**• Докажите, что при всех допустимых значениях переменной $y$ значение выражения $\frac{17y+5}{21y-3}-\frac{9-11y}{21y-3}$ не зависит от значения $y$.

**83.*** Докажите, что при всех допустимых значениях переменной выражение $\frac{a^2-6}{(a-2)^4}-\frac{7a-4}{(a-2)^4}+\frac{3a+6}{(a-2)^4}$ принимает положительные значения.

**84.*** Докажите, что при всех допустимых значениях переменной выражение $\frac{2-b^2}{(b-5)^6}-\frac{7-3b}{(b-5)^6}+\frac{7b-20}{(b-5)^6}$ принимает отрицательные значения.

**85.**** Представьте данную дробь в виде суммы или разности целого и дробного выражений:

1) $\frac{x+3}{x}$;  2) $\frac{a^2-2a-5}{a-2}$.

**86.**** Представьте данную дробь в виде суммы или разности целого и дробного выражений:

1) $\frac{4a-b}{a}$;  2) $\frac{b^2+7b+3}{b+7}$.

**87.**** Известно, что $\frac{x}{y}=4$. Найдите значение выражения:

1) $\frac{y}{x}$;  2) $\frac{2x-3y}{y}$;  3) $\frac{x^2+y^2}{xy}$.

**88.**** Известно, что $\frac{a}{b}=-2$. Найдите значение выражения:

1) $\frac{a-b}{a}$;  2) $\frac{4a+5b}{b}$;  3) $\frac{a^2-2ab+b^2}{ab}$.

**89.**** Найдите все натуральные значения $n$, при которых значение выражения является целым числом:

1) $\frac{n+6}{n}$;  2) $\frac{3n^2-4n-14}{n}$;  3) $\frac{4n+7}{2n-3}$.

**90.**** Найдите все натуральные значения $n$, при которых значение выражения является целым числом:

1) $\frac{8n-9}{n}$;  2) $\frac{n^2+2n-8}{n}$;  3) $\frac{9n-4}{3n-5}$.

## УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

**91.** Из двух сел, расстояние между которыми равно 9 км, одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста и встретились через 20 мин. Если бы велосипедисты ехали в одном направлении, то один из них догнал бы другого через 3 ч. Найдите скорость каждого велосипедиста.

**92.** Решите уравнение:
1) $1 - 4(x + 1) = 1{,}8 - 1{,}6x$;
2) $3(0{,}5x - 4) + 8{,}5x = 10x - 11$.

**93.** Докажите, что выражение $(a + 4)(a - 8) + 4(2a + 9)$ при всех значениях $a$ принимает неотрицательные значения.

## ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

**94.** Вместо звездочки запишите такой одночлен, чтобы выполнялось равенство:
1) $a^2b \cdot * = a^2b^2$; 2) $5xy^3 \cdot * = 10x^4y^6$; 3) $6x^5 \cdot * = 12x^{10}$.

**95.** Вместо звездочки запишите такой многочлен, чтобы выполнялось равенство:
1) $* \cdot (a-b) = (a+b)(a-b)^2$; 2) $(a+10b) \cdot * = a^3 - 100ab^2$.

**96.** Приведите к общему знаменателю дроби:
1) $\frac{1}{3a}$ и $\frac{2}{3b}$;
2) $\frac{4m}{p^3q^2}$ и $\frac{3n}{p^2q^3}$;
3) $\frac{5}{m-n}$ и $\frac{6}{m+n}$;
4) $\frac{6x}{x-2y}$ и $\frac{y}{x+y}$;
5) $\frac{y}{6y-36}$ и $\frac{1}{y^2-6y}$;
6) $\frac{1}{a^2-1}$ и $\frac{1}{a^2+a}$.

## УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

**97.** Может ли четное число иметь нечетных делителей больше, чем четных?

# 4. Сложение и вычитание рациональных дробей с разными знаменателями

Применяя основное свойство рациональной дроби, сложение и вычитание дробей с разными знаменателями можно свести к сложению и вычитанию дробей с одинаковыми знаменателями.

Пусть нужно сложить две рациональные дроби $\frac{A}{B}$ и $\frac{C}{D}$.

Можно записать: $\frac{A}{B} = \frac{A \cdot D}{B \cdot D}$; $\frac{C}{D} = \frac{C \cdot B}{D \cdot B}$.

Тогда $\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=\frac{A\cdot D}{B\cdot D}+\frac{C\cdot B}{D\cdot B}=\frac{A\cdot D+C\cdot B}{B\cdot D}$.

Здесь в качестве **общего знаменателя** выбрано выражение, равное произведению знаменателей данных дробей.

Отметим, что произведение знаменателей данных дробей не всегда является наиболее удобным общим знаменателем.

Напомним: чтобы найти общий знаменатель обыкновенных дробей, мы находили наименьшее общее кратное знаменателей, раскладывая их на простые множители. Аналогично, чтобы найти общий знаменатель рациональных дробей, может оказаться удобным предварительно разложить знаменатели на множители.

**ПРИМЕР 1** Упростите выражение:

1) $\frac{b+1}{abc}+\frac{1-a}{a^2c}$;

2) $\frac{m}{7m+7n}-\frac{n}{7m-7n}$;

3) $\frac{10n+14}{n^2-49}+\frac{6}{7-n}$;

4) $\frac{2a}{25-10a+a^2}-\frac{1}{3a-15}$;

5) $\frac{x}{x-4}-\frac{x+2}{x-2}$.

*Решение.* 1) Общим знаменателем данных дробей является одночлен $a^2bc$. Следовательно,

$$\frac{{}^{a/}b+1}{abc}+\frac{{}^{b/}1-a}{a^2c}=\frac{ab+a+b-ab}{a^2bc}=\frac{a+b}{a^2bc}.$$

2) Разложив предварительно знаменатели данных дробей на множители, получаем:

$$\frac{m}{7m+7n}-\frac{n}{7m-7n}=\frac{{}^{m-n/}m}{7(m+n)}-\frac{{}^{m+n/}n}{7(m-n)}=$$

$$=\frac{m(m-n)-n(m+n)}{7(m+n)(m-n)}=\frac{m^2-mn-mn-n^2}{7(m^2-n^2)}=\frac{m^2-2mn-n^2}{7(m^2-n^2)}.$$

3) Имеем: $\frac{10n+14}{n^2-49}+\frac{6}{7-n}=\frac{10n+14}{(n-7)(n+7)}-\frac{{}^{n+7/}6}{n-7}=\frac{10n+14-6(n+7)}{(n-7)(n+7)}=$

$$=\frac{10n+14-6n-42}{(n-7)(n+7)}=\frac{4n-28}{(n-7)(n+7)}=\frac{4(n-7)}{(n-7)(n+7)}=\frac{4}{n+7}.$$

4) $\frac{2a}{25-10a+a^2}-\frac{1}{3a-15}=\frac{2a}{(5-a)^2}-\frac{1}{3(a-5)}=$

$$=\frac{{}^{3/}2a}{(a-5)^2}-\frac{{}^{a-5/}1}{3(a-5)}=\frac{6a-a+5}{3(a-5)^2}=\frac{5a+5}{3(a-5)^2}.$$

5) В этом случае общий знаменатель данных дробей равен произведению их знаменателей. Тогда

$$\frac{^{x-2/}x}{x-4}-\frac{^{x-4/}x+2}{x-2}=\frac{x(x-2)-(x+2)(x-4)}{(x-4)(x-2)}=$$

$$=\frac{x^2-2x-x^2+4x-2x+8}{(x-4)(x-2)}=\frac{8}{(x-4)(x-2)}.$$ ▲

**ПРИМЕР 2** Представьте в виде дроби выражение $\frac{21c^2}{7c-2}-3c$.

*Решение.* Представив выражение $3c$ в виде дроби со знаменателем 1, получаем:

$$\frac{21c^2}{7c-2}-3c=\frac{21c^2}{7c-2}-\frac{^{7c-2/}3c}{1}=\frac{21c^2-21c^2+6c}{7c-2}=\frac{6c}{7c-2}.$$ ▲

Заметим, что сумма и разность двух рациональных дробей являются рациональными дробями.

?

1. Как выполнить сложение и вычитание рациональных дробей с разными знаменателями?
2. Что является суммой и разностью двух рациональных дробей?

## УПРАЖНЕНИЯ

**98.°** Выполните действия:

1) $\frac{x}{4}+\frac{2x}{3}$;
2) $\frac{5b}{14}-\frac{b}{7}$;
3) $\frac{m}{8}-\frac{n}{6}$;
4) $\frac{4}{x}-\frac{3}{y}$;
5) $\frac{m}{4n}+\frac{m}{6n}$;
6) $\frac{c}{b}-\frac{d}{3b}$;
7) $\frac{a}{b^2}+\frac{1}{ab^4}$;
8) $\frac{11}{5a}-\frac{2c}{15ab}$;
9) $\frac{m}{abc}+\frac{c}{abm}$.

**99.°** Представьте в виде дроби выражение:

1) $\frac{x}{8}-\frac{y}{12}$;
2) $\frac{4a}{7}+\frac{a}{4}$;
3) $\frac{m}{n}-\frac{n}{m}$;
4) $\frac{x^2}{2y}+\frac{y}{8x}$;
5) $\frac{7}{cd}+\frac{k}{cp}$;
6) $\frac{6a}{35c^5}-\frac{9b}{14c^2}$.

**100.°** Упростите выражение:

1) $\frac{a+7}{12}+\frac{a-4}{9}$;
2) $\frac{2b-7c}{6}-\frac{3b+2c}{15}$;
3) $\frac{3x-2}{x}-\frac{3y-1}{y}$;
4) $\frac{6p+1}{p}-\frac{2p+8}{3p}$;

5) $\frac{5m-n}{14m}-\frac{m-6n}{7m}$;

6) $\frac{x+4}{11x}-\frac{y-3}{11y}$;

7) $\frac{a+b}{ab}+\frac{a-c}{ac}$;

8) $\frac{2}{p^2}+\frac{p-1}{p}$;

9) $\frac{k+4}{k}-\frac{3k-4}{k^2}$;

10) $\frac{x-y}{x^3}-\frac{y-x^2}{x^2y}$;

11) $\frac{2m-3n}{m^2n}+\frac{7m-2n}{mn^2}$;

12) $\frac{c+d}{cd^4}-\frac{c^2-8d}{c^3d^3}$.

**101.°** Выполните сложение или вычитание дробей:

1) $\frac{9-5b}{b}-\frac{7-5c}{c}$;

2) $\frac{4d+7}{7d}-\frac{d-6}{6d}$;

3) $\frac{5-k}{5p}-\frac{p+10}{5k}$;

4) $\frac{m-n}{mn}-\frac{p-n}{np}$;

5) $\frac{6a+2}{ab}-\frac{2a+4}{a^2b}$;

6) $\frac{c^2-16}{c^6}-\frac{c-9}{c^5}$;

7) $\frac{1}{x^3}-\frac{1+x^2}{x^5}$;

8) $\frac{1-ab}{abc}-\frac{1-ad}{acd}$.

**102.°** Выполните действия:

1) $\frac{2}{x}+\frac{3x-2}{x+1}$;

2) $\frac{m}{n}-\frac{m}{m+n}$;

3) $\frac{a}{a-3}-\frac{3}{a+3}$;

4) $\frac{c}{3c-1}-\frac{c}{3c+1}$;

5) $\frac{x}{2y+1}-\frac{x}{3y-2}$;

6) $\frac{a-b}{b}-\frac{a-b}{a+b}$.

**103.°** Представьте в виде дроби выражение:

1) $\frac{a}{a-b}+\frac{a}{b}$;

2) $\frac{4}{x}-\frac{5x+4}{x+2}$;

3) $\frac{b}{b-2}-\frac{2}{b+2}$.

**104.°** Упростите выражение:

1) $\frac{1}{b(a-b)}-\frac{1}{a(a-b)}$;

2) $\frac{5}{a}+\frac{30}{a(a-6)}$;

3) $\frac{3}{x-2}-\frac{2x+2}{x(x-2)}$;

4) $\frac{y}{2(y+3)}-\frac{y}{5(y+3)}$;

5) $\frac{5m+3}{2(m+1)}-\frac{7m+4}{3(m+1)}$;

6) $\frac{c-a}{a(a+b)}+\frac{c+b}{b(a+b)}$.

**105.°** Выполните действия:

1) $\frac{1}{a(a+b)}+\frac{1}{b(a+b)}$;

2) $\frac{4}{b}-\frac{8}{b(b+2)}$;

3) $\frac{x}{5(x+7)}-\frac{x}{6(x+7)}$;

4) $\frac{4n+2}{3(n-1)}-\frac{5n+3}{4(n-1)}$.

**106.°** Выполните сложение или вычитание дробей:

1) $\frac{a}{a-2}-\frac{3a+1}{3a-6}$;
2) $\frac{18}{b^2+3b}-\frac{6}{b}$;
3) $\frac{2}{c+1}-\frac{c-1}{c^2+c}$;
4) $\frac{d-1}{2d-8}+\frac{d}{d-4}$;
5) $\frac{m+1}{3m-15}-\frac{m-1}{2m-10}$;
6) $\frac{m-2n}{6m+6n}-\frac{m-3n}{4m+4n}$;
7) $\frac{a^2+2}{a^2+2a}-\frac{a+4}{2a+4}$;
8) $\frac{3x-4y}{x^2-2xy}-\frac{3y-x}{xy-2y^2}$.

**107.°** Упростите выражение:

1) $\frac{b}{b-5}-\frac{4b-1}{4b-20}$;
2) $\frac{2}{m}-\frac{16}{m^2+8m}$;
3) $\frac{a-2}{2a-6}-\frac{a-1}{3a-9}$;
4) $\frac{a^2+b^2}{2a^2+2ab}+\frac{b}{a+b}$;
5) $\frac{b+4}{ab-b^2}-\frac{a+4}{a^2-ab}$;
6) $\frac{c-4}{4c+24}+\frac{4c+9}{c^2+6c}$.

**108.°** Выполните действия:

1) $\frac{3}{x+3}+\frac{x+4}{x^2-9}$;
2) $\frac{a^2}{a^2-64}-\frac{a}{a-8}$;
3) $\frac{6b}{9b^2-4}-\frac{1}{3b-2}$;
4) $\frac{3a+b}{a^2-b^2}+\frac{1}{a+b}$;
5) $\frac{m}{m+5}-\frac{m^2}{m^2+10m+25}$;
6) $\frac{b}{a+b}-\frac{b^2}{a^2+b^2+2ab}$.

**109.°** Упростите выражение:

1) $\frac{4x-y}{x^2-y^2}+\frac{1}{x-y}$;
2) $\frac{y^2}{y^2-81}-\frac{y}{y+9}$;
3) $\frac{10a}{25a^2-9}-\frac{1}{5a+3}$;
4) $\frac{n}{n-7}-\frac{n^2}{n^2-14n+49}$.

**110.°** Представьте в виде дроби выражение:

1) $\frac{a}{b}+1$;
2) $\frac{x}{y}-x$;
3) $\frac{m}{n}+\frac{n}{m}+2$;
4) $\frac{9}{p^2}-\frac{4}{p}+3$;
5) $2-\frac{3b+2a}{a}$;
6) $\frac{3b+4}{b-2}-3$;
7) $6m-\frac{12m^2+1}{2m}$;
8) $\frac{20b^2+5}{2b-1}-10b$.

**111.°** Выполните действия:

1) $a-\frac{4}{a}$;
2) $\frac{1}{x}+x-2$;
3) $\frac{m}{n^3}-\frac{1}{n}+m$;
4) $\frac{2k^2}{k-5}-k$;
5) $3n-\frac{9n^2-2}{3n}$;
6) $5-\frac{4y-12}{y-2}$.

**112.•** Упростите выражение:

1) $\frac{a^2+1}{a^2-2a+1}+\frac{a+1}{a-1}$;
2) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\frac{a-b}{a+b}$;
3) $\frac{c+7}{c-7}+\frac{28c}{49-c^2}$;
4) $\frac{5a+3}{2a^2+6a}+\frac{6-3a}{a^2-9}$;
5) $\frac{a}{a^2-4a+4}-\frac{a+4}{a^2-4}$;
6) $\frac{2p}{p-5}-\frac{5}{p+5}+\frac{2p^2}{25-p^2}$;
7) $\frac{1}{y}-\frac{y+8}{16-y^2}-\frac{2}{y-4}$;
8) $\frac{2b-1}{4b+2}+\frac{4b}{4b^2-1}+\frac{2b+1}{3-6b}$.

**113.•** Упростите выражение:

1) $\frac{m+n}{m-n}-\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$;
2) $\frac{x-y}{x+y}+\frac{y^2}{2xy+x^2+y^2}$;
3) $\frac{2a}{4a^2-1}-\frac{a+4}{2a^2+a}$;
4) $\frac{b-2}{b^2+6b+9}-\frac{b}{b^2-9}$;
5) $\frac{x-6}{x^2+3x}+\frac{x}{x+3}-\frac{x-3}{x}$;
6) $\frac{y+2}{y-2}-\frac{y-2}{y+2}-\frac{16}{y^2-4}$.

**114.•** Докажите, что при всех допустимых значениях переменной значение данного выражения не зависит от значения переменной:

1) $\frac{2x+1}{2x-4}+\frac{2x-1}{6-3x}-\frac{x+7}{6x-12}$;
2) $\frac{24-2a}{a^2-16}-\frac{a}{2a-8}+\frac{4}{a+4}$.

**115.•** Представьте в виде дроби выражение:

1) $1-a+\frac{a^2-2}{a+2}$;
2) $\frac{a^2-b^2}{3a+b}+3a-b$;
3) $\frac{c^2+9}{c-3}-c-3$;
4) $\frac{8m^2}{4m-3}-2m-1$.

**116.•** Упростите выражение:

1) $b+7-\frac{14b}{b+7}$;
2) $5c-\frac{10-29c+10c^2}{2c-5}+2$.

**117.*** Упростите выражение и найдите его значение:

1) $\frac{7}{2a-4}-\frac{12}{a^2-4}-\frac{3}{a+2}$, если $a=5$;

2) $\frac{2c+3}{2c^2-3c}+\frac{2c-3}{2c^2+3c}-\frac{16c}{4c^2-9}$, если $c=-0{,}8$;

3) $\frac{m^2+16n^2}{m^2-16n^2}-\frac{m+4n}{2m-8n}$, если $m=3$, $n=0{,}5$.

**118.*** Найдите значение выражения:

1) $\frac{6}{5x-20}-\frac{x-5}{x^2-8x+16}$, если $x=5$;

2) $\frac{2y-1}{2y}-\frac{2y}{2y-1}-\frac{1}{2y-4y^2}$, если $y=-2\frac{3}{7}$.

**119.*** Докажите тождество:

1) $\frac{a+b}{a}-\frac{a}{a-b}+\frac{b^2}{a^2-ab}=0$;

2) $\frac{a+3}{a+1}-\frac{a+1}{a-1}+\frac{6}{a^2-1}=\frac{2}{a^2-1}$;

3) $\frac{2a^2+4}{a^2-1}-\frac{a-2}{a+1}-\frac{a+1}{a-1}=\frac{1}{a-1}$.

**120.*** Докажите тождество:

1) $\frac{1}{6a-4b}-\frac{1}{6a+4b}-\frac{3a}{4b^2-9a^2}=\frac{1}{3a-2b}$;

2) $\frac{c+2}{c^2+3c}-\frac{1}{3c+9}-\frac{2}{3c}=0$.

**121.*** Найдите разность дробей:

1) $\frac{a+1}{a^3-1}-\frac{1}{a^2+a+1}$;

2) $\frac{1}{b+3}-\frac{b^2-6b}{b^3+27}$.

**122.*** Упростите выражение:

1) $\frac{9m^2-3mn+n^2}{3m-n}-\frac{9m^2+3mn+n^2}{3m+n}$;

2) $1-\frac{2b-1}{4b^2-2b+1}-\frac{2b}{2b+1}$.

**123.*** Докажите тождество: $\frac{3a^2+24}{a^3+8}-\frac{6}{a^2-2a+4}-\frac{1}{a+2}=\frac{2}{a+2}$.

**124.**** Упростите выражение:

1) $\frac{4b}{a^2-b^2}+\frac{a-b}{a^2+ab}+\frac{a+b}{b^2-ab}$;

2) $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}-\frac{x}{x^2-4}+\frac{x^2+4}{8x-2x^3}$;

3) $\frac{1}{(a-5b)^2}-\frac{2}{a^2-25b^2}+\frac{1}{(a+5b)^2}$;

4) $\frac{x^2+9x+18}{xy+3y-2x-6}-\frac{x+5}{y-2}$.

**125.**** Докажите тождество:

1) $\frac{a+3}{a^2-3a}+\frac{a-3}{3a+9}+\frac{12}{9-a^2}=\frac{a-3}{3a}$;

2) $\frac{b-4}{2a-1}-\frac{b^2-2b-24}{2ab-4-b+8a}=\frac{2}{2a-1}$.

**126.**** Докажите тождество

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)}-\frac{1}{(a-b)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}=0.$$

**127.**** Докажите тождество

$$\frac{bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ac}{(b-a)(b-c)}+\frac{ab}{(c-a)(c-b)}=1.$$

**128.*** Упростите выражение

$$\frac{1}{(a-1)(a-2)}+\frac{1}{(a-2)(a-3)}+\frac{1}{(a-3)(a-4)}.$$

**129.*** Упростите выражение

$$\frac{1}{(a-1)(a-3)}+\frac{1}{(a-3)(a-5)}+\frac{1}{(a-5)(a-7)}.$$

**130.*** Докажите тождество

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1+a}+\frac{2}{1+a^2}+\frac{4}{1+a^4}+\frac{8}{1+a^8}+\frac{16}{1+a^{16}}=\frac{32}{1-a^{32}}.$$

**131.*** Докажите тождество

$$\frac{3}{1-a^2}+\frac{3}{1+a^2}+\frac{6}{1+a^4}+\frac{12}{1+a^8}+\frac{24}{1+a^{16}}=\frac{48}{1-a^{32}}.$$

**132.*** Докажите, что если $\frac{a-c}{b+c}+\frac{b-a}{a+c}+\frac{c-b}{a+b}=1$, то

$$\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+c}+\frac{a+c}{a+b}=4.$$

## УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

**133.** Найдите корень уравнения:

1) $\frac{x}{3}+\frac{x-1}{2}=4$;

2) $\frac{x-4}{2}-\frac{x-1}{5}=3$.

**134.** Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases}x+y=8,\\3x-2y=9;\end{cases}$

2) $\begin{cases}2x+5y=13,\\3x-5y=-13.\end{cases}$

**135.** За первый день трехдневной гонки велосипедисты проехали $\frac{4}{15}$ всего маршрута, за второй день — $\frac{2}{5}$ всего маршрута, а за третий — оставшиеся 90 км. Какое расстояние проехали велосипедисты за три дня?

**136.** (*Из болгарского фольклора.*) Пятеро братьев хотели разделить 20 овец так, чтобы каждый из них получил нечетное количество овец. Возможно ли это?

**137.** Верно ли утверждение, что при любом натуральном $n$ значение выражения $(5n + 7)^2 - (n - 1)^2$ делится нацело на 48?

## ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

**138.** Укажите число, обратное числу:

1) $\frac{5}{8}$; 2) 7; 3) $-3\frac{5}{6}$; 4) $\frac{1}{14}$; 5) 0,12.

**139.** Найдите значение произведения:

1) $\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{20}$; 2) $6 \cdot \frac{7}{18}$; 3) $\frac{3}{8} \cdot \left(-2\frac{2}{3}\right)$.

**140.** Выполните деление:

1) $\frac{5}{18} : \left(-\frac{25}{27}\right)$; 2) $8 : \frac{4}{17}$; 3) $-\frac{8}{15} : (-24)$; 4) $1\frac{3}{5} : 5\frac{1}{3}$.

**141.** Найдите значение степени:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^5$; 2) $\left(\frac{2}{5}\right)^3$; 3) $\left(-2\frac{2}{3}\right)^2$; 4) $\left(-3\frac{1}{3}\right)^3$.

## УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

**142.** Два парома одновременно отплывают от противоположных берегов реки и пересекают ее перпендикулярно берегам. Скорости паромов постоянные, но разные. Паромы встречаются на расстоянии 720 м от одного из берегов, после чего продолжают движение. Достигнув берегов, паромы сразу начинают двигаться обратно и через некоторое время встречаются на расстоянии 400 м от другого берега. Какова ширина реки?

## ЗАДАНИЕ № 1 «ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ» В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ

**1.** Какое из данных выражений является целым?

А) $\frac{m+n}{m}$; Б) $\frac{m+n}{7}$; В) $\frac{m+n}{7m}$; Г) $m+\frac{n}{7m}$.

**2.** При каком значении переменной не имеет смысла выражение $\frac{3a}{2a-10}$?

А) 0; Б) 10; В) 5; Г) 0; 5.

**3.** При каких значениях аргумента функция $y=\frac{x+2}{x^2-1}$ не определена?

А) −1; 1; Б) 1; В) −2; −1; 1; Г) −2; 1.

**4.** Сократите дробь $\frac{21a^6}{14a^3}$.

А) $\frac{3a^3}{2}$; Б) $\frac{3a^2}{2}$; В) $\frac{3}{2a^3}$; Г) $\frac{3}{2a^2}$.

**5.** Какой из данных дробей тождественно равна дробь $\frac{5b-15}{b^2-9}$?

А) $\frac{b-3}{5}$; Б) $\frac{b+3}{5}$; В) $\frac{5}{b-3}$; Г) $\frac{5}{b+3}$.

**6.** Сократите дробь $\frac{12c^2-4c}{3c-1}$.

А) $4c$; Б) $-4c$; В) $\frac{1}{4c}$; Г) $-\frac{1}{4c}$.

**7.** Выполните вычитание: $\frac{5x}{x-2}-\frac{10}{x-2}$.

А) $\frac{x+2}{x-2}$; Б) $\frac{5x+10}{x-2}$; В) 5; Г) −5.

**8.** Выполните сложение: $\frac{4-m}{m-3}+\frac{2m-5}{3-m}$.

А) $\frac{m-1}{m-3}$; Б) $\frac{1-3m}{m-3}$; В) 3; Г) −3.

**9.** Представьте в виде дроби выражение $\frac{3n^2}{n-6}-3n$.

А) $\frac{3n}{n-4}$; Б) $\frac{3n}{4-n}$; В) $\frac{18n}{n-6}$; Г) $\frac{18}{6-n}$.

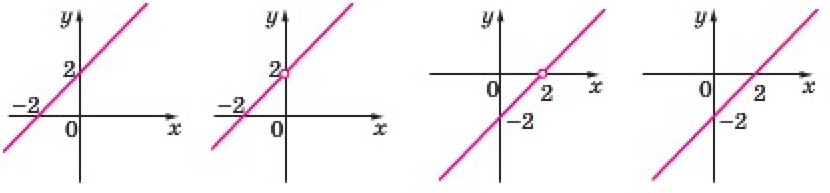
**10.** Упростите выражение $\frac{2m+1}{3m-2}-\frac{3m^2+m-2}{9m^2-12m+4}$.

А) $\frac{1}{(3m-2)^2}$; Б) $\frac{1}{3m-2}$; В) $\frac{m}{(3m-2)^2}$; Г) $\frac{m}{3m-2}$.

**11.** Упростите выражение $\frac{a-12}{a^2+4a}-\frac{a-4}{a}+\frac{a}{a+4}$.

А) $\frac{4}{a}$; Б) $\frac{1}{a}$; В) $a$; Г) $a+4$.

**12.** На каком рисунке изображен график функции $y=\frac{x^2-4x+4}{x-2}$?




А) Б) В) Г)

# 5. Умножение и деление рациональных дробей. Возведение рациональной дроби в степень

Вы знаете правила умножения и деления обыкновенных дробей. Их можно выразить следующими равенствами:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},\quad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}.$$

По аналогичным правилам выполняют умножение и деление рациональных дробей.

***Произведением двух рациональных дробей является рациональная дробь, числитель которой равен произведению числителей данных дробей, а знаменатель — произведению их знаменателей.***

***Частным двух рациональных дробей является рациональная дробь, числитель которой равен произведению числителя делимого и знаменателя делителя, а знаменатель — произведению знаменателя делимого и числителя делителя.***

**ПРИМЕР 1** Выполните действия:

1) $\frac{21c^6}{b^8} \cdot \frac{b^2}{14c^4}$;

2) $(2x-12) \cdot \frac{4x}{x^2-12x+36}$;

3) $\frac{a^2+2ab}{a+9} : \frac{a^2-4b^2}{3a+27}$.

4) $\frac{5c^2-35c}{c+2} : (c-7)$.

*Решение.* 1) Имеем: $\frac{21c^6}{b^8} \cdot \frac{b^2}{14c^4} = \frac{21c^6 \cdot b^2}{b^8 \cdot 14c^4} = \frac{3c^2}{2b^6}$.

2) Представив многочлен $2x-12$ в виде дроби со знаменателем 1, получаем:

$$(2x-12) \cdot \frac{4x}{x^2-12x+36} = \frac{2x-12}{1} \cdot \frac{4x}{x^2-12x+36} = \frac{2(x-6) \cdot 4x}{(x-6)^2} = \frac{8x}{x-6}.$$

3) $\frac{a^2+2ab}{a+9} : \frac{a^2-4b^2}{3a+27} = \frac{a(a+2b)}{a+9} \cdot \frac{3(a+9)}{(a-2b)(a+2b)} = \frac{3a}{a-2b}$.

4) $\frac{5c^2-35c}{c+2} : (c-7) = \frac{5c^2-35c}{c+2} : \frac{c-7}{1} = \frac{5c(c-7)}{c+2} \cdot \frac{1}{c-7} = \frac{5c}{c+2}$. ▲

Правило умножения двух дробей можно обобщить для случая, когда требуется найти произведение трех и более рациональных дробей. Например, для трех дробей имеем:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} \cdot \frac{P}{Q} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D} \cdot \frac{P}{Q} = \frac{A \cdot C \cdot P}{B \cdot D \cdot Q}.$$

**ПРИМЕР 2** Упростите выражение $\frac{2a^5}{15b^8} \cdot \frac{10b^2}{7c^4} : \frac{4a^2}{9bc^8}$.

*Решение.* Имеем:

$$\frac{2a^5}{15b^8} \cdot \frac{10b^2}{7c^4} : \frac{4a^2}{9bc^8} = \frac{2a^5}{15b^8} \cdot \frac{10b^2}{7c^4} \cdot \frac{9bc^8}{4a^2} =$$

$$= \frac{2a^5 \cdot 10b^2 \cdot 9bc^8}{15b^8 \cdot 7c^4 \cdot 4a^2} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 9 \cdot a^5 b^3 c^8}{15 \cdot 7 \cdot 4 \cdot a^2 b^8 c^4} = \frac{3a^3}{7c}. \text{ ▲}$$

Применяя правило умножения дробей, можно получить правило возведения рациональных дробей в степень. Для натурального $n$, $n > 1$, имеем:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \underbrace{\frac{A}{B} \cdot \frac{A}{B} \cdot \ldots \cdot \frac{A}{B}}_{n \text{ множителей}} = \frac{\overbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}^{n \text{ множителей}}}{\underbrace{B \cdot B \cdot \ldots \cdot B}_{n \text{ множителей}}} = \frac{A^n}{B^n}.$$

Для $n = 1$ договорились, что $\left(\frac{A}{B}\right)^1 = \frac{A}{B}$.

Следовательно,

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n},$$

где $n$ — натуральное число.

***Чтобы возвести рациональную дробь в степень, нужно возвести в эту степень числитель и знаменатель. Первый результат записать как числитель, а второй — как знаменатель дроби.***

**ПРИМЕР 3** Представьте в виде дроби выражение $\left(-\frac{3a^2}{2bc^4}\right)^3$.

*Решение.* $\left(-\frac{3a^2}{2bc^4}\right)^3 = -\left(\frac{3a^2}{2bc^4}\right)^3 = -\frac{(3a^2)^3}{(2bc^4)^3} = -\frac{27a^6}{8b^3c^{12}}$. ▲

**?**

**1.** Что является произведением двух рациональных дробей?

**2.** Что является частным двух рациональных дробей?

**3.** Как возвести рациональную дробь в степень?

## УПРАЖНЕНИЯ

**143.°** Какому из данных выражений равно произведение $\frac{a^3}{c^8} \cdot \frac{c^4}{a^3}$?

1) $\frac{1}{c^2}$; 2) $\frac{a}{c^2}$; 3) $\frac{1}{c^4}$; 4) $\frac{a}{c^4}$.

**144.°** Выполните умножение:

1) $\frac{3a^2}{c} \cdot \frac{a^2}{c}$; 3) $\frac{x}{yz} \cdot \frac{y^4}{5x}$; 5) $14m^9 \cdot \frac{n^2}{7m^3}$; 7) $\frac{48ab}{17c^4} \cdot \frac{51bc^5}{40a^4}$;

2) $\frac{2a}{b} \cdot \frac{b}{8a}$; 4) $\frac{3m}{16n^2} \cdot 8n^6$; 6) $\frac{15a^4}{b^{12}} \cdot \frac{b^6}{10a^2}$; 8) $\frac{21c^3}{13p^2} \cdot \frac{39p}{28c^2}$.

**145.°** Упростите выражение:

1) $\frac{a^2}{b^6} \cdot \frac{b^2}{a^2}$; 3) $\frac{a}{2b} \cdot 2a$; 5) $\frac{11x^3}{y^8} \cdot \frac{y^5}{33x^7}$;

2) $\frac{4m^2}{k^5} \cdot \frac{mk^5}{12}$; 4) $15x^{12} \cdot \frac{y^2}{5x^4}$; 6) $\frac{7k^8}{9mp} \cdot \frac{27m^8}{56k^6p^2}$.

**146.°** Упростите выражение:

1) $\frac{a-b}{3b} \cdot \frac{3}{a-b}$; 2) $\frac{2mn+n^2}{6m} \cdot \frac{2m}{n}$;

3) $\frac{7a+7b}{b^6}\cdot\frac{b^3}{a+b}$;

4) $\frac{32a}{a^2-9}\cdot\frac{a-3}{8a}$;

5) $\frac{c-1}{c+6}\cdot\frac{c+6}{c^2-2c+1}$;

6) $\frac{m-2}{m^2-49}\cdot\frac{m+7}{m-2}$;

7) $(a+4)\cdot\frac{a}{2a+8}$;

8) $\frac{x-9}{4x+8}\cdot\frac{x^2+2x}{x-9}$;

9) $\frac{4a^2-4a+1}{3a+3}\cdot\frac{a+1}{2a-1}$;

10) $\frac{a^2-25}{4a}\cdot\frac{4a^2}{a^2-5a}$.

**147.°** Выполните умножение:

1) $\frac{3a+b}{4c}\cdot\frac{c}{3a+b}$;

2) $\frac{ab-b^2}{8}\cdot\frac{4a}{b^4}$;

3) $\frac{5x-5y}{x^6}\cdot\frac{x^3}{x-y}$;

4) $\frac{18b}{b^2-16}\cdot\frac{b+4}{3b}$;

5) $\frac{6}{m^2-9n^2}\cdot(m-3n)$;

6) $\frac{3c-9}{9c^2+6c+1}\cdot\frac{3c+1}{c-3}$.

**148.°** Какому из данных выражений равно частное $\frac{3}{c^3}:\frac{12}{c^9}$?

1) $\frac{c^3}{4}$;　2) $\frac{c^6}{4}$;　3) $4c^3$;　4) $4c^6$.

**149.°** Выполните деление:

1) $\frac{8m}{n}:\frac{4m}{n}$;

2) $\frac{3b}{8}:b$;

3) $\frac{7c^2}{d}:\frac{c}{d^3}$;

4) $\frac{6a}{5b}:\frac{3a^2}{20b^2}$;

5) $-\frac{9a}{b^5}:\frac{18a^4}{b^3}$;

6) $a^2:\frac{a}{b^2c}$;

7) $24a^3:\frac{12a^2}{b}$;

8) $\frac{36a}{c^3}:(4a^2c)$.

**150.°** Найдите частное:

1) $\frac{7}{a^2}:\frac{28}{a^3}$;

2) $\frac{b^9}{8}:\frac{b^3}{48}$;

3) $\frac{27}{m^6}:\frac{36}{m^7n^2}$;

4) $\frac{6x^{10}}{y^3}:(30x^5y^2)$;

5) $49m^4:\frac{21m}{n^2}$;

6) $\frac{16x^3y^3}{33z^5}:\left(-\frac{10x^2}{55z^6}\right)$.

**151.°** Упростите выражение:

1) $\frac{a-b}{7a}:\frac{a-b}{7b}$;

2) $\frac{x^2-y^2}{x^2}:\frac{6x+6y}{x^5}$;

3) $\frac{c-5}{c^2-4c}:\frac{c-5}{5c-20}$;

4) $\frac{x-y}{xy}:\frac{x^2-y^2}{3xy}$;

5) $\frac{a^2-25}{a+7}:\frac{a-5}{a+7}$;

6) $\frac{a^2-4a+4}{a+2}:(a-2)$;

7) $(p^2-16k^2):\frac{p+4k}{p}$; 8) $\frac{a^2-ab}{a^2}:\frac{a^2-2ab+b^2}{ab}$.

**152.°** Выполните деление:

1) $\frac{5m-2n}{10k}:\frac{5m-2n}{10k^2}$; 4) $\frac{a^2-16}{a-3}:\frac{a+4}{a-3}$;

2) $\frac{p+3}{p^2-2p}:\frac{p+3}{4p-8}$; 5) $\frac{y-9}{y-8}:\frac{y^2-81}{y^2-16y+64}$;

3) $\frac{a^2-b^2}{2ab}:\frac{a+b}{ab}$; 6) $(x^2-49y^2):\frac{x-7y}{x}$.

**153.°** Выполните возведение в степень:

1) $\left(\frac{a}{b}\right)^9$; 3) $\left(\frac{c}{2d}\right)^5$; 5) $\left(-\frac{3m^4}{2n^3}\right)^3$;

2) $\left(\frac{m}{n^2}\right)^3$; 4) $\left(\frac{5a^6}{b^5}\right)^2$; 6) $\left(-\frac{6a^6}{b^7}\right)^2$.

**154.°** Представьте в виде дроби выражение:

1) $\left(\frac{a^6}{b^8}\right)^{10}$; 2) $\left(-\frac{4m}{9n^3}\right)^2$; 3) $\left(-\frac{10c^7}{3d^5}\right)^3$; 4) $\left(\frac{2m^3n^2}{kp^8}\right)^6$.

**155.•** Упростите выражение:

1) $\frac{6a^4b^2}{35c^3}\cdot\frac{14b^2}{a^7c^5}\cdot\frac{5a^3c^8}{18b^4}$; 4) $\left(\frac{m^5n}{3p^3}\right)^3:\frac{m^{10}n^5}{54p^8}$;

2) $\frac{33m^8}{34n^8}:\frac{88m^4}{51n^4}:\frac{21m^6}{16n^2}$; 5) $\left(\frac{2a^5}{y^6}\right)^4:\left(\frac{4a^6}{y^8}\right)^3$;

3) $\frac{36x^6}{49y^5}:\frac{24x^9}{25y^4}\cdot\frac{7x^2}{30y}$; 6) $\left(-\frac{27x^3}{16y^5}\right)^2\cdot\left(\frac{8y^3}{9x^2}\right)^3$.

**156.•** Упростите выражение:

1) $\frac{3a^4b^3}{10c^5}\cdot\frac{4b^4c^2}{27a^7}:\frac{5b^7}{9a^8c^3}$; 3) $\left(\frac{5a^3}{b^4}\right)^4\cdot\frac{b^{18}}{50a^{16}}$;

2) $\frac{3a^2}{2b^3c^2}:\frac{7c^3}{6b^3}:\frac{9ab}{14c^{12}}$; 4) $\left(\frac{3x^7}{y^{10}}\right)^4:\left(\frac{3x^6}{y^8}\right)^3$.

**157.•** Замените переменную $x$ таким выражением, чтобы получилось тождество:

1) $\left(\frac{4a^2}{b^3}\right)^2\cdot x=\frac{6a}{b^2}$; 2) $\left(\frac{2b^4}{3c}\right)^3:x=\frac{b^6}{12}$.

**158.*** Выполните умножение и деление дробей:

1) $\frac{4-a}{8a^3} \cdot \frac{12a^5}{a^2-16}$;
2) $\frac{4c-d}{c^2+cd} \cdot \frac{2c^2-2d^2}{4c^2-cd}$;
3) $\frac{b^2-6b+9}{b^2-3b+9} \cdot \frac{b^3+27}{5b-15}$;
4) $\frac{a^3-16a}{3a^2b} \cdot \frac{12ab^2}{4a+16}$;
5) $\frac{a^3+b^3}{a^2-b^2} \cdot \frac{7a-7b}{a^2-ab+b^2}$;
6) $\frac{x^2-9}{x+y} \cdot \frac{5x+5y}{x^2-3x}$;
7) $\frac{m+2n}{2-3m} : \frac{m^2+4mn+4n^2}{3m^2-2m}$;
8) $\frac{a^3+8}{16-a^4} : \frac{a^2-2a+4}{a^2+4}$;
9) $\frac{x^2-12x+36}{3x+21} \cdot \frac{x^2-49}{4x-24}$;
10) $\frac{3a+15b}{a^2-81b^2} : \frac{4a+20b}{a^2-18ab+81b^2}$.

**159.*** Упростите выражение:

1) $\frac{7a^2}{a^2-25} \cdot \frac{5-a}{a}$;
2) $\frac{a^3+b^3}{a^3-b^3} \cdot \frac{b-a}{b+a}$;
3) $\frac{a^4-1}{a^3-a} \cdot \frac{a}{1+a^2}$;
4) $\frac{a^2-8ab}{12b} : \frac{8b^2-ab}{24a}$;
5) $\frac{5m^2-5n^2}{m^2+n^2} : \frac{15n-15m}{4m^2+4n^2}$;
6) $\frac{mn^2-36m}{m^3-8} : \frac{2n+12}{6m-12}$;
7) $\frac{a^4-1}{a^2-a+1} : \frac{a-1}{a^3+1}$;
8) $\frac{4x^2-100}{6x} : (2x^2-20x+50)$.

**160.*** Упростите выражение и найдите его значение:

1) $\frac{a^2-81}{a^2-8a} : \frac{a-9}{a^2-64}$, если $a = -4$;
2) $\frac{x}{4x^2-4y^2} : \frac{1}{6x+6y}$, если $x = 4{,}2$, $y = -2{,}8$;
3) $(3a^2-18a+27) : \frac{3a-9}{4a}$, если $a = 0{,}5$;
4) $\frac{a^6+a^5}{(3a-3)^2} : \frac{a^5+a^4}{9a^2-9a}$, если $a = 0{,}8$.

**161.*** Найдите значение выражения:

1) $\frac{1}{a^2-ab} : \frac{b}{b^2-a^2}$, если $a = 2\frac{1}{3}$, $b = -\frac{3}{7}$;
2) $\frac{a^2+4ab+4b^2}{a^2-9b^2} : \frac{3a+6b}{2a-6b}$, если $a = 4$, $b = -5$.

**162.**** Известно, что $x - \frac{1}{x} = 9$. Найдите значение выражения $x^2 + \frac{1}{x^2}$.

**163.**** Известно, что $3x+\frac{1}{x}=-4$. Найдите значение выражения $9x^2+\frac{1}{x^2}$.

**164.**** Дано: $x^2+\frac{16}{x^2}=41$. Найдите значение выражения $x+\frac{4}{x}$.

**165.**** Дано: $x^2+\frac{1}{x^2}=6$. Найдите значение выражения $x-\frac{1}{x}$.

**166.**** Упростите выражение:

1) $\frac{a^2-36}{a^2+ab-6a-6b}:\frac{a^2+ab+6a+6b}{a^2+2ab+b^2}$;

2) $\frac{a^2+a-ab-b}{a^2+a+ab+b}:\frac{a^2-a-ab+b}{a^2-a+ab-b}$.

**167.**** Упростите выражение:

1) $\frac{25-5a+5b-ab}{25+5a-5b-ab}\cdot\frac{ab-5a-5b+25}{ab+5a+5b+25}$;

2) $\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-ab-4a+4b}:\frac{a^2-ab+4a-4b}{a^2-16}$.

**168.**** Докажите тождество $\frac{8a^2}{a-3b}:\frac{6a^3}{a^2-9b^2}\cdot\frac{3a}{4a+12b}=1$.

**169.**** Докажите тождество $\frac{a^2+a}{2a-12}\cdot\frac{6a+6}{2a+12}:\frac{9a^3+18a^2+9a}{a^2-36}=\frac{1}{6}$.

## УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

**170.** Решите уравнение:

1) $(2x+3)^2-2x(5+2x)=10$;

2) $(x-2)(x-3)-(x-6)(x+1)=12$.

**171.** Докажите, что уравнение $\frac{2x+1}{3}-\frac{x-4}{2}=\frac{x+5}{6}$ не имеет корней.

**172.** Из пункта $A$ в пункт $B$, расстояние между которыми равно 192 км, со скоростью 60 км/ч выехал мотоциклист. Через 30 мин навстречу ему из пункта $B$ со скоростью 75 км/ч выехал второй мотоциклист. Сколько времени ехал второй мотоциклист до встречи с первым?

**173.** В двух бидонах находится 80 л молока. Если из первого бидона перелить 20 % молока во второй бидон, то в обоих бидонах молока станет поровну. Сколько литров молока было в каждом бидоне первоначально?

**174.** (*Из учебника «Арифметика» Л. Ф. Магницкого*[1].) Двенадцать людей несут 12 хлебов. Каждый мужчина несет по 2 хлеба, женщина — по половине хлеба, а ребенок — по четверти хлеба. Сколько было мужчин, женщин и детей?

## УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

**175.** Вася и Петя по очереди заменяют в уравнении $x^4 + *x^3 + *x^2 + *x + * = 0$ один знак $*$ на некоторое число. Первым замену делает Вася. Петя хочет получить уравнение, которое имеет корень. Может ли Вася ему помешать?

# 6. Тождественные преобразования рациональных выражений

Правила действий с рациональными дробями позволяют любое рациональное выражение преобразовать в рациональную дробь.

Рассмотрим примеры.

**ПРИМЕР 1** Упростите выражение

$$\left(\frac{3a}{a-2}-\frac{6a}{a^2-4a+4}\right):\frac{a-4}{a^2-4}-\frac{2a^2+8a}{a-2}.$$

*Решение.* Данное выражение можно упростить аналогично тому, как мы делали это, когда находили значение числового выражения, содержащего несколько арифметических действий. Выполним действия в соответствии с порядком выполнения арифметических действий: сначала — вычитание выражений, стоящих в скобках, затем — деление и наконец — вычитание:

1) $$\frac{3a}{a-2}-\frac{6a}{a^2-4a+4}=\frac{^{a-2/}3a}{a-2}-\frac{6a}{(a-2)^2}=\frac{3a^2-6a-6a}{(a-2)^2}=\frac{3a^2-12a}{(a-2)^2};$$

2) $$\frac{3a^2-12a}{(a-2)^2}:\frac{a-4}{a^2-4}=\frac{3a^2-12a}{(a-2)^2}\cdot\frac{a^2-4}{a-4}=\frac{3a(a-4)}{(a-2)^2}\cdot\frac{(a-2)(a+2)}{a-4}=$$

$$=\frac{3a(a+2)}{a-2}=\frac{3a^2+6a}{a-2};$$

[1] Магницкий Леонтий Филиппович (1669–1739) — выдающийся русский педагог-математик, автор знаменитого учебника «Арифметика» (1703), по которому училось несколько поколений. «Вратами своей учености» считал «Арифметику» Магницкого М. В. Ломоносов.

3) $\dfrac{3a^2+6a}{a-2}-\dfrac{2a^2+8a}{a-2}=\dfrac{3a^2+6a-2a^2-8a}{a-2}=\dfrac{a^2-2a}{a-2}=\dfrac{a(a-2)}{a-2}=a.$

*Ответ*: $a$. ▲

Преобразование рационального выражения можно выполнять не отдельными действиями, а «цепочкой». Проиллюстрируем этот прием на примере.

**ПРИМЕР 2** Докажите, что при всех допустимых значениях переменной значение выражения $\dfrac{3a}{a-3}+\dfrac{a+5}{18-6a}\cdot\dfrac{54a}{5a+a^2}$ не зависит от значения $a$.

*Решение.* Упростим данное выражение:

$$\frac{3a}{a-3}+\frac{a+5}{18-6a}\cdot\frac{54a}{5a+a^2}=\frac{3a}{a-3}+\frac{a+5}{6(3-a)}\cdot\frac{54a}{a(5+a)}=$$

$$=\frac{3a}{a-3}+\frac{9}{3-a}=\frac{3a}{a-3}-\frac{9}{a-3}=\frac{3a-9}{a-3}=\frac{3(a-3)}{a-3}=3.$$

Следовательно, при всех допустимых значениях $a$ значение данного выражения равно 3. ▲

**ПРИМЕР 3** Докажите тождество $\left(\dfrac{a-7}{3a-1}+\dfrac{a-7}{a+1}\right)\cdot\dfrac{3a-1}{a^2-7a}=\dfrac{4}{a+1}$.

*Решение.* Преобразуем левую часть доказываемого равенства. Здесь целесообразно раскрыть скобки, применяя распределительное свойство умножения:

$$\left(\frac{a-7}{3a-1}+\frac{a-7}{a+1}\right)\cdot\frac{3a-1}{a^2-7a}=\frac{a-7}{3a-1}\cdot\frac{3a-1}{a^2-7a}+\frac{a-7}{a+1}\cdot\frac{3a-1}{a^2-7a}=$$

$$=\frac{^{a+1/}1}{a}+\frac{3a-1}{a(a+1)}=\frac{a+1+3a-1}{a(a+1)}=\frac{4a}{a(a+1)}=\frac{4}{a+1}.$$

Тождество доказано. ▲

**ПРИМЕР 4** Упростите выражение $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}}$.

*Решение.* Записав данное выражение в виде частного от деления числителя на знаменатель, получим:

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right):\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\right)=$$

$$=\frac{bc+ac+ab}{abc}:\frac{c+a+b}{abc}=\frac{bc+ac+ab}{abc}\cdot\frac{abc}{c+a+b}=\frac{bc+ac+ab}{c+a+b}.$$

Данное выражение можно упростить иным способом, используя основное свойство дроби, а именно: умножить ее числитель и знаменатель на одночлен $abc$:

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}}=\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)abc}{\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\right)abc}=\frac{\frac{1}{a}\cdot abc+\frac{1}{b}\cdot abc+\frac{1}{c}\cdot abc}{\frac{1}{ab}\cdot abc+\frac{1}{bc}\cdot abc+\frac{1}{ac}\cdot abc}=\frac{bc+ac+ab}{c+a+b}.$$

*Ответ:* $\frac{bc+ac+ab}{c+a+b}$. ▲

## УПРАЖНЕНИЯ

**176.°** Упростите выражение:

1) $\left(\frac{a}{3}+\frac{a}{4}\right)\cdot\frac{6}{a^2}$;

2) $\frac{a^2b}{a-b}\cdot\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$;

3) $\left(1+\frac{a}{b}\right):\left(1-\frac{a}{b}\right)$;

4) $\left(\frac{a^2}{b^2}-\frac{2a}{b}+1\right)\cdot\frac{b}{a-b}$;

5) $\frac{a^2-ab}{b^2-1}\cdot\frac{b+1}{a}-\frac{a}{b-1}$;

6) $\left(\frac{5}{m-n}-\frac{4}{m+n}\right):\frac{m+9n}{m+n}$;

7) $\frac{x-2}{x+2}\cdot\left(x-\frac{x^2}{x-2}\right)$;

8) $\frac{x^2+x}{4}:\frac{x^2}{4}+\frac{x-1}{x}$;

9) $\frac{6c^2}{c^2-1}:\left(\frac{1}{c-1}+1\right)$;

10) $\left(\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x-y}\right)\cdot\frac{x^2+xy}{x^2+y^2}$.

**177.°** Упростите выражение:

1) $\left(x+\frac{x}{y}\right):\left(x-\frac{x}{y}\right)$;

2) $\left(\frac{a}{b}+\frac{a+b}{a-b}\right)\cdot\frac{ab^2}{a^2+b^2}$;

3) $\left(\frac{m}{m-1}-1\right):\frac{m}{mn-n}$;

4) $\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\cdot\frac{4ab}{a-b}$;

5) $\frac{a}{b}-\frac{a^2-b^2}{b^2}:\frac{a+b}{b}$;

6) $\frac{7x}{x+2}-\frac{x-8}{3x+6}\cdot\frac{84}{x^2-8x}$;

7) $\left(a-\frac{9a-9}{a+3}\right):\frac{a^2-3a}{a+3}$;

8) $\left(\frac{a}{a+2}-\frac{8}{a+8}\right)\cdot\frac{a^2+8a}{a-4}$.

**178.•** Выполните действия:

1) $\frac{a+2}{a^2-2a+1}:\frac{a^2-4}{3a-3}-\frac{3}{a-2}$;

2) $\frac{b^2+3b}{b^3+9b}\cdot\left(\frac{b-3}{b+3}+\frac{b+3}{b-3}\right)$;

3) $\left(\frac{3c+1}{3c-1}-\frac{3c-1}{3c+1}\right):\frac{2c}{6c+2}$;

4) $\left(\frac{1}{a^2-4ab+4b^2}-\frac{1}{4b^2-a^2}\right):\frac{2a}{a^2-4b^2}$;

5) $\left(\dfrac{a-8}{a^2-10a+25}-\dfrac{a}{a^2-25}\right):\dfrac{a-20}{(a-5)^2}$;

6) $\left(\dfrac{2x+1}{x^2+6x+9}-\dfrac{x-2}{x^2+3x}\right):\dfrac{x^2+6}{x^3-9x}$.

**179.*** Выполните действия:

1) $\dfrac{b+4}{b^2-6b+9}:\dfrac{b^2-16}{2b-6}-\dfrac{2}{b-4}$;

2) $\left(\dfrac{m-1}{m+1}-\dfrac{m+1}{m-1}\right):\dfrac{4m}{m^2-1}$;

3) $\dfrac{2x}{x^2-y^2}:\left(\dfrac{1}{x^2+2xy+y^2}-\dfrac{1}{y^2-x^2}\right)$;

4) $\left(\dfrac{2a-3}{a^2-4a+4}-\dfrac{a-1}{a^2-2a}\right):\dfrac{a^2-2}{a^3-4a}$.

**180.*** Упростите выражение:

1) $\left(\dfrac{15}{x-7}-x-7\right)\cdot\dfrac{7-x}{x^2-16x+64}$;

2) $\left(a-\dfrac{5a-16}{a-3}\right):\left(2a-\dfrac{2a}{a-3}\right)$;

3) $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{a}{b^2}\right)\cdot\dfrac{ab}{a^2-b^2}+\dfrac{2}{b-a}$;

4) $\left(\dfrac{a}{a-1}-\dfrac{a}{a+1}-\dfrac{a^2+1}{1-a^2}\right):\dfrac{a^2+a}{(a-1)^2}$;

5) $\left(\dfrac{x+2y}{x-2y}-\dfrac{x-2y}{x+2y}-\dfrac{16y^2}{x^2-4y^2}\right):\dfrac{4y}{x+2y}$;

6) $\left(\dfrac{3a-8}{a^2-2a+4}+\dfrac{1}{a+2}-\dfrac{4a-28}{a^3+8}\right)\cdot\dfrac{a^2-4}{4}$.

**181.*** Упростите выражение:

1) $\dfrac{x^2+14x+49}{x+6}:\left(\dfrac{13}{x+6}-x+6\right)$;

2) $\left(c-\dfrac{2c-9}{c+8}\right):\dfrac{c^2+3c}{c^2-64}+\dfrac{24}{c}$;

3) $\left(\dfrac{36}{x^2-9}-\dfrac{x-3}{x+3}-\dfrac{3+x}{3-x}\right):\dfrac{6}{3-x}$;

4) $\left(\dfrac{2y-1}{y^2+2y+4}+\dfrac{9y+6}{y^3-8}+\dfrac{1}{y-2}\right)\cdot\dfrac{y^2-4}{18}$.

**182.*** Докажите тождество:

1) $\left(\dfrac{ab}{a^2-b^2}+\dfrac{b}{2b-2a}\right):\dfrac{2b}{a^2-b^2}=\dfrac{a-b}{4}$;

2) $\left(\dfrac{8a}{4-a^2}-\dfrac{a-2}{a+2}\right):\dfrac{a+2}{a}+\dfrac{2}{a-2}=-1$;

3) $\left(\dfrac{3}{36-c^2}+\dfrac{1}{c^2-12c+36}\right)\cdot\dfrac{(c-6)^2}{2}+\dfrac{3c}{c+6}=2$.

**183.*** Докажите тождество:

1) $\left(\dfrac{b}{a^2-ab}-\dfrac{2}{a-b}-\dfrac{a}{b^2-ab}\right):\dfrac{a^2-b^2}{4ab}=\dfrac{4}{a+b}$;

2) $\dfrac{(a-b)^2}{a}\cdot\left(\dfrac{a}{(a-b)^2}+\dfrac{a}{b^2-a^2}\right)+\dfrac{3a+b}{a+b}=3$.

**184.*** Зависит ли значение выражения от значения входящей в него переменной:

1) $\left(\dfrac{a+3}{a^2-1}-\dfrac{1}{a^2+a}\right):\dfrac{3a+3}{a^2-a}$; 2) $\left(\dfrac{a}{a^2-49}-\dfrac{1}{a+7}\right):\dfrac{7a}{a^2+14a+49}-\dfrac{2}{a-7}$?

**185.*** Докажите, что значение выражения не зависит от значения входящей в него переменной:

1) $\dfrac{3x^2-27}{4x^2+2}\cdot\left(\dfrac{6x+1}{x-3}+\dfrac{6x-1}{x+3}\right)$;

2) $\dfrac{3}{2a-3}-\dfrac{8a^3-18a}{4a^2+9}\cdot\left(\dfrac{2a}{4a^2-12a+9}-\dfrac{3}{4a^2-9}\right)$.

**186.*** Упростите выражение:

1) $\dfrac{a-\dfrac{a^2}{a+1}}{a-\dfrac{a}{a+1}}$;

2) $\dfrac{a-\dfrac{6a-9}{a}}{1-\dfrac{3}{a}}$;

3) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{a}}}$;

4) $\dfrac{\dfrac{2a-b}{b}+1}{\dfrac{2a+b}{b}-1}+\dfrac{3-\dfrac{b}{a}}{\dfrac{3a}{b}-1}$.

**187.*** Упростите выражение:

1) $\dfrac{\dfrac{a-b}{a+b}+\dfrac{b}{a}}{\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{a-b}{a}}$;

2) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{a+1}}}$.

**188.**** Упростите выражение:

1) $\left(\frac{a^2}{b^3-ab^2}+\frac{a-b}{b^2}-\frac{1}{b}\right):\left(\frac{a+b}{b-a}-\frac{b-a}{a+b}+\frac{6a^2}{a^2-b^2}\right)$;

2) $\left(\frac{a+2}{4a^3-4a^2+a}-\frac{2-a}{1-8a^3}\cdot\frac{4a^2+2a+1}{2a^2+a}\right):\left(\frac{1}{1-2a}\right)^2-\frac{8a-1}{2a^2+a}$.

**189.**** Упростите выражение:

$\left(\frac{18y^2+3y}{27y^3-1}-\frac{3y+1}{9y^2+3y+1}\right):\left(1-\frac{3y-1}{y}-\frac{5-6y}{3y-1}\right)$.

**190.**** Докажите тождество:

1) $\frac{16}{(a-2)^4}:\left(\frac{1}{(a-2)^2}-\frac{2}{a^2-4}+\frac{1}{(a+2)^2}\right)-\frac{8a}{(a-2)^2}=1$;

2) $\frac{a+11}{a+9}-\left(\frac{a+5}{a^2-81}+\frac{a+7}{a^2-18a+81}\right):\left(\frac{a+3}{a-9}\right)^2=1$.

**191.**** Докажите, что при всех допустимых значениях переменной выражение $\frac{b^2+9}{3b^2-b^3}+\left(\frac{b+3}{b-3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{b-3}+\frac{6}{9-b^2}-\frac{3}{b^2+3b}\right)$ принимает положительные значения.

**192.**** Подставьте вместо $x$ данное выражение и упростите полученное выражение:

1) $\frac{x-a}{x-b}$, если $x=\frac{ab}{a+b}$;

2) $\frac{a-bx}{b+ax}$, если $x=\frac{a-b}{a+b}$.

## УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

**193.** Решите уравнение:

1) $(3x-1)(4x+5)-(2x+3)(6x+1)=4$;

2) $8x(2x+7)-(4x+3)^2=15$.

**194.** Докажите, что значение выражения $2^{14}-2^{12}-2^{10}$ делится нацело на 11.

**195.** Докажите, что при любом натуральном $n$ значение выражения $3^{n+2}-2^{n+2}+3^n-2^n$ делится нацело на 10.

**196.** На первом складе было картофеля в 3 раза больше, чем на втором. Когда с первого склада вывезли 400 кг картофеля, то на нем осталось картофеля в 2 раза меньше, чем было на втором. Сколько картофеля было на первом складе первоначально?

**197.** Куртка стоила на 200 грн меньше, чем костюм. Во время сезонной распродажи куртка подешевела на 10 %, а костюм — на 20 %, после чего куртку и костюм можно было приобрести за 1010 грн. Какова первоначальная цена куртки и какова — костюма?

**198.** Из пункта $A$ в пункт $B$ автомобиль ехал со скоростью 60 км/ч, а возвращался из пункта $B$ в пункт $A$ со скоростью 70 км/ч по другой дороге, которая на 15 км короче первой. На обратный путь автомобиль потратил на 30 мин меньше, чем на путь из пункта $A$ в пункт $B$. За какое время он доехал из пункта $A$ в пункт $B$?

**199.** Рабочий должен был изготовлять ежедневно 10 деталей. Однако он изготовлял ежедневно 12 деталей, и уже за 2 дня до окончания срока работы ему осталось изготовить 6 деталей. Сколько деталей должен был изготовить рабочий?

**200.*** (*Из украинского фольклора.*) За 30 монет купили 30 птиц. Сколько купили птиц каждого вида, если за трех воробьев платили одну монету, за двух голубей — тоже одну монету, а за одну горлицу — две монеты, при этом купили хотя бы одну птичку каждого вида?

## ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

**201.** Решите уравнение:

1) $\frac{2x+7}{4}=\frac{x+5}{3}$; 3) $0,21x - 0,7x = 0$; 5) $25x^2 - 36 = 0$;

2) $x^2 + 6x = 0$; 4) $x^2 - 16 = 0$; 6) $x^2 + 4 = 0$.

**202.** При каком значении переменной не имеет смысла выражение:

1) $\frac{6}{3x-9}$; 3) $\frac{x+4}{3x^2+12x}$; 5) $\frac{x}{x^2-10x+25}$;

2) $\frac{x^2+1}{x^2-1}$; 4) $\frac{8}{x+7}+\frac{4}{x-2}$; 6) $\frac{x+2}{(x+10)(x-12)}$?

**203.** При каком значении переменной значение дроби равно нулю:

1) $\frac{x-8}{9}$; 2) $\frac{x-2}{x+2}$; 3) $\frac{4}{x-5}$?

**Повторите содержание пп. 14, 15 на с. 235–236.**

## УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

**204.** На доске написаны многочлены $x + 2$ и $2x + 1$. Разрешается записать сумму, разность или произведение любых двух из уже написанных многочленов. Может ли на доске появиться многочлен $2x^3 + x + 5$?

## ЗАДАНИЕ № 2 «ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ» В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ

**1.** Представьте в виде дроби выражение $\frac{12m^4}{n^{10}} \cdot \frac{n^5}{36m^8}$.

А) $\frac{1}{3m^2n^2}$; Б) $\frac{1}{3m^4n^5}$; В) $\frac{3}{m^2n^2}$; Г) $\frac{3}{m^4n^5}$.

**2.** Выполните умножение: $(a+5b) \cdot \frac{8}{a^2-25b^2}$.

А) $8(a - 5b)$; Б) $8(a + 5b)$; В) $\frac{8}{a+5b}$; Г) $\frac{8}{a-5b}$.

**3.** Упростите выражение $\frac{b^2-6b+9}{b-7} \cdot \frac{b-7}{b-3}$.

А) $b + 3$; Б) $b - 3$; В) $\frac{1}{b-3}$; Г) $\frac{1}{b+3}$.

**4.** Выполните деление: $\frac{5a^6}{b^8} : (10a^3b^2)$.

А) $\frac{2a^9}{b^6}$; Б) $\frac{b^6}{2a^9}$; В) $\frac{2b^{10}}{a^3}$; Г) $\frac{a^3}{2b^{10}}$.

**5.** Упростите выражение $\frac{3x+9}{x^2-2x} : \frac{x+3}{4x-8}$.

А) $\frac{12}{x}$; Б) $\frac{x}{12}$; В) 12; Г) $x$.

**6.** Представьте в виде дроби выражение $\frac{n^2-3n}{64n^2-1} : \frac{n^4-27n}{64n^2+16n+1}$.

А) $\frac{8n+1}{(8n-1)(n^2+3n+9)}$; В) $\frac{8n-1}{(8n+1)(n^2+3n+9)}$;

Б) $\frac{8n+1}{(8n-1)(n^2-3n+9)}$; Г) $\frac{8n-1}{(8n+1)(n^2-3n+9)}$.

**7.** Выполните возведение в степень: $\left(-\frac{2a^2}{b^3}\right)^4$.

А) $\frac{8a^8}{b^{12}}$; Б) $-\frac{8a^8}{b^{12}}$; В) $\frac{16a^8}{b^{12}}$; Г) $-\frac{16a^8}{b^{12}}$.

**8.** Упростите выражение $\left(\frac{1}{a-6}-\frac{1}{a+6}\right):\frac{2}{a+6}$.

А) $\frac{6}{a+6}$; Б) $\frac{6}{a-6}$; В) $6\,(a-6)$; Г) $6\,(a+6)$.

**9.** Какому числу при всех допустимых значениях $a$ равно значение выражения $\left(\frac{30a}{9a^2-25}+\frac{5}{5-3a}\right):\left(\frac{3a-5}{3a+5}-1\right)$?

А) $\frac{1}{2}$; Б) 2; В) $-\frac{1}{2}$; Г) $-2$.

**10.** Чему равно значение выражения $\frac{a^2-4ab}{b^2}$, если $3a-5b=0{,}2\,(2a+b)$?

А) 4; Б) $-4$; В) 3; Г) $-3$.

**11.** Известно, что $x+\frac{1}{x}=6$. Найдите значение выражения $x^2+\frac{1}{x^2}$.

А) 36; Б) 38; В) 34; Г) 35.

**12.** Упростите выражение $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{a}{b^2}}{\frac{a}{b^2}-\frac{1}{a}}$.

А) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$; Б) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$; В) $\frac{a^2+b^2}{ab^2\,(a^2-b^2)}$; Г) $\frac{ab\,(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$.

## 7. Равносильные уравнения. Рациональные уравнения

Рассмотрим два уравнения: $x^2=4$ и $|x|=2$.
Очевидно, что каждое из них имеет одни и те же корни: $-2$ и 2.
Говорят, что уравнения $x^2=4$ и $|x|=2$ **равносильны.**
Приведем еще примеры пар равносильных уравнений:

$$\frac{1}{2}x=0 \text{ и } 2x=0;$$

$$2x = 4 \text{ и } 4x - 8 = 0;$$
$$x^2 = 1 \text{ и } (x - 1)(x + 1) = 0.$$

Рассмотрим уравнения $x^2 = -5$ и $|x| = -3$. Каждое из этих уравнений не имеет корней. Такие уравнения также принято считать равносильными.

**Определение. Два уравнения называют равносильными, если они имеют одни и те же корни или каждое из уравнений не имеет корней.**

Число 2 является корнем каждого из уравнений $(x - 2)(x + 1) = 0$ и $x - 2 = 0$. Однако эти уравнения не являются равносильными, так как первое уравнение имеет еще один корень, равный $-1$, который не является корнем второго уравнения.

В 7 классе вы изучили свойства уравнений с одной переменной. Теперь, используя понятие «равносильные уравнения», эти свойства можно сформулировать следующим образом.

- ***Если к обеим частям данного уравнения прибавить (или из обеих частей вычесть) одно и то же число, то получим уравнение, равносильное данному.***
- ***Если какое-либо слагаемое перенести из одной части уравнения в другую, изменив при этом его знак на противоположный, то получим уравнение, равносильное данному.***
- ***Если обе части уравнения умножить (разделить) на одно и то же отличное от нуля число, то получим уравнение, равносильное данному.***

Рассмотрим такую задачу. Автомобиль, проехав 180 км пути, увеличил скорость на 10 км/ч и оставшиеся 210 км проехал за то же время, что и первую часть пути. Найдите начальную скорость автомобиля.

Пусть $x$ км/ч — искомая скорость. Тогда скорость автомобиля на второй части пути равна $(x + 10)$ км/ч. Автомобиль преодолел первую часть пути за $\frac{180}{x}$ ч, а вторую — за $\frac{210}{x+10}$ ч.

Уравнение $\frac{180}{x} = \frac{210}{x+10}$ является математической моделью рассмотренной реальной ситуации. Обе части полученного уравнения являются рациональными выражениями.

**Определение. Уравнение, левая и правая части которого являются рациональными выражениями, называют рациональным.**

Из определения следует, что, решая задачу, мы получили рациональное уравнение.

Отметим, что линейное уравнение с одной переменной, то есть уравнение вида $ax = b$, является рациональным.

Рассмотрим рациональное уравнение вида $\frac{A}{B}=0$, где $A$ и $B$ — многочлены.

Вы знаете, что *дробь равна нулю тогда и только тогда, когда ее числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля*. Поэтому, чтобы решить уравнение вида $\frac{A}{B}=0$, нужно потребовать *одновременного* выполнения двух условий: $A = 0$ и $B \neq 0$. Это значит, что при решении уравнений указанного вида следует руководствоваться таким алгоритмом:

- решить уравнение $A = 0$;
- проверить, какие из найденных корней удовлетворяют условию $B \neq 0$;
- корни, удовлетворяющие условию $B \neq 0$, включить в ответ.

**ПРИМЕР 1** Решите уравнение $\frac{(x-1)(x+1)}{x^2-4x+3}=0.$

*Решение.* Приравняем числитель дроби, стоящей в левой части уравнения, к нулю. Имеем: $(x - 1)(x + 1) = 0$. Корнями этого уравнения являются числа $-1$ и $1$.

Проверим, удовлетворяют ли эти корни условию $x^2-4x+3\neq 0$.

При $x = -1$ получаем, что $x^2-4x+3=8\neq 0$.

При $x = 1$ получаем, что $x^2-4x+3=0$.

Следовательно, число $-1$ является корнем заданного уравнения, а число $1$ — нет.

*Ответ*: $-1$. ▲

Как мы уже отмечали выше, решение уравнения вида $\frac{A}{B}=0$ сводится к решению уравнения $A = 0$ и проверке условия $B \neq 0$. Говорят, что уравнение $\frac{A}{B}=0$ равносильно системе

$$\begin{cases} A=0, \\ B\neq 0. \end{cases}$$

Например, уравнение $\frac{(x-1)(x+1)}{x^2-4x+3}=0$ равносильно системе

$$\begin{cases} (x-1)(x+1)=0, \\ x^2-4x+3\neq 0. \end{cases}$$

Как мы выяснили, решением этой системы является число $-1$.

Завершим решение задачи об автомобиле. Имеем: $\frac{180}{x}=\frac{210}{x+10}$.

Переходим к равносильному уравнению $\frac{180}{x}-\frac{210}{x+10}=0$.

Отсюда

$$\frac{180(x+10)-210x}{x(x+10)}=0;$$

$$\frac{1800-30x}{x(x+10)}=0.$$

Последнее уравнение равносильно системе $\begin{cases}1800-30x=0,\\ x(x+10)\neq 0.\end{cases}$

Корнем уравнения, входящего в систему, является число 60; очевидно, что оно удовлетворяет условию $x(x+10)\neq 0$.

*Ответ*: 60 км/ч.

Как известно, любое рациональное выражение можно представить в виде дроби. Поэтому любое рациональное уравнение можно свести к уравнению вида $\frac{A}{B}=0$. Именно так мы и поступили, решая уравнение $\frac{180}{x}=\frac{210}{x+10}$.

**ПРИМЕР 2** Решите уравнение $\frac{3x+5}{6x+3}+\frac{1}{4x^2-1}=\frac{x}{2x-1}$.

*Решение.* Имеем: $\frac{3x+5}{3(2x+1)}+\frac{1}{(2x-1)(2x+1)}-\frac{x}{2x-1}=0$. Представив левую часть этого уравнения в виде рациональной дроби, получим:

$$\frac{4x-2}{3(2x-1)(2x+1)}=0.$$

Полученное уравнение равносильно системе $\begin{cases}4x-2=0,\\ 3(2x-1)(2x+1)\neq 0.\end{cases}$

Перепишем эту систему так: $\begin{cases}4x-2=0,\\ x\neq 0{,}5,\\ x\neq -0{,}5.\end{cases}$

Отсюда $\begin{cases}x=0{,}5,\\ x\neq 0{,}5,\\ x\neq -0{,}5.\end{cases}$

Следовательно, данное уравнение не имеет корней.

*Ответ*: корней нет. ▲

**ПРИМЕР 3** Решите уравнение $\frac{2x^2-4x-16}{x-4}-x=0.$

*Решение.* Представим левую часть уравнения в виде дроби:

$$\frac{2x^2-4x-16-x^2+4x}{x-4}=0;$$

$$\frac{x^2-16}{x-4}=0.$$

Полученное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2-16=0, \\ x-4\neq 0, \end{cases}$$

откуда получаем:

$$\begin{cases} x=4 \text{ или } x=-4, \\ x\neq 4; \end{cases}$$

$$x=-4.$$

*Ответ*: −4. ▲

Рассмотрим задачу, в которой рациональное уравнение является математической моделью реальной ситуации.

**ПРИМЕР 4** Турист проплыл на лодке 3 км по течению реки и 2 км против течения за 30 мин. Найдите скорость лодки в стоячей воде, если скорость течения реки равна 2 км/ч.

*Решение.* Пусть скорость лодки в стоячей воде равна $x$ км/ч. Тогда ее скорость по течению реки составляет $(x+2)$ км/ч, а против течения — $(x-2)$ км/ч. Турист проплыл 3 км по течению за $\frac{3}{x+2}$ ч, а 2 км против течения — за $\frac{2}{x-2}$ ч. Поскольку весь путь был пройден за $30 \text{ мин}=\frac{1}{2}$ ч, то $\frac{3}{x+2}+\frac{2}{x-2}=\frac{1}{2}.$

Решим полученное уравнение:

$$\frac{3}{x+2}+\frac{2}{x-2}=\frac{1}{2};$$

$$\frac{3x-6+2x+4}{x^2-4}-\frac{1}{2}=0;$$

$$\frac{10x-4-x^2+4}{2(x^2-4)}=0;$$

$$\frac{10x-x^2}{2(x^2-4)}=0;$$

$$\begin{cases}10x - x^2 = 0,\\ 2(x^2 - 4) \neq 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x(10 - x) = 0,\\ x \neq 2,\\ x \neq -2;\end{cases}$$

$$x = 0 \text{ или } x = 10.$$

Корень $x = 0$ не соответствует смыслу задачи. Следовательно, скорость лодки в стоячей воде равна 10 км/ч.

*Ответ*: 10 км/ч. ▲

?

1. Какие два уравнения называют равносильными?
2. С помощью каких преобразований данного уравнения можно получить уравнение, равносильное данному?
3. Какое уравнение называют рациональным?
4. Сформулируйте условие, при котором дробь равна нулю.
5. Опишите алгоритм решения уравнения вида $\frac{A}{B} = 0$, где $A$ и $B$ – многочлены.

## УПРАЖНЕНИЯ

**205.°** Равносильны ли уравнения:

1) $x + 2 = 10$ и $3x = 24$;

2) $-2x = -6$ и $\frac{1}{3}x = 1$;

3) $x - 5 = 0$ и $x(x - 5) = 0$;

4) $(3x - 12)(x + 2) = 0$ и $(0{,}4 - 0{,}1x)(7x + 14) = 0$;

5) $\frac{6}{x} = 0$ и $x^2 = -4$;

6) $x + 1 = 1 + x$ и $\frac{x^2+1}{x^2+1} = 1$?

**206.°** Составьте уравнение, равносильное данному:

1) $2x - 3 = 4$; 2) $|x| = 1$; 3) $x + 6 = x - 2$.

**207.°** Решите уравнение:

1) $\frac{x-6}{x-4} = 0$;

2) $\frac{x-2}{x^2-4} = 0$;

3) $\frac{x^2-4}{x-2} = 0$;

4) $\frac{x-2}{x-2} = 1$;

5) $\frac{2x^2+18}{x^2+9}=2;$

6) $\frac{x}{x-5}+\frac{2x-9}{x-5}=0;$

7) $\frac{5x-7}{x+1}-\frac{x-5}{x+1}=0;$

8) $\frac{2x+16}{x+3}-\frac{1-3x}{x+3}=0;$

9) $\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x+1}=0;$

10) $\frac{3}{x-2}=\frac{4}{x+3};$

11) $\frac{x}{x-6}=2;$

12) $\frac{x-4}{x-3}=\frac{2x+1}{2x-1};$

13) $\frac{x+8}{x}-\frac{6}{x-2}=0;$

14) $\frac{2x}{x-5}-\frac{x^2+15x}{x^2-25}=0;$

15) $3-\frac{2x^2-5x}{x^2-3x}=0.$

**208.°** Решите уравнение:

1) $\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}=0;$

2) $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}=0;$

3) $\frac{x+7}{x-7}-\frac{2x-3}{x-7}=0;$

4) $\frac{10-3x}{x+8}+\frac{5x+6}{x+8}=0;$

5) $\frac{x-6}{x-2}-\frac{x-8}{x}=0;$

6) $\frac{2x-4}{x}-\frac{3x+1}{x}+\frac{x+5}{x}=0;$

7) $\frac{x}{x+6}-\frac{36}{x^2+6x}=0;$

8) $\frac{2x^2+3x+1}{2x+1}-x=1;$

9) $\frac{4}{x-1}-\frac{4}{x+1}=1.$

**209.°** Какое число нужно вычесть из числителя и знаменателя дроби $\frac{15}{19}$, чтобы получить дробь, равную $\frac{2}{3}$?

**210.°** Какое число нужно прибавить к числителю и знаменателю дроби $\frac{25}{32}$, чтобы получить дробь, равную $\frac{5}{6}$?

**211.•** Составьте пару равносильных уравнений, каждое из которых:

1) имеет один корень;
2) имеет два корня;
3) имеет бесконечно много корней;
4) не имеет корней.

**212.•** Решите уравнение:

1) $\frac{5}{x^2-4}+\frac{2x}{x+2}=2;$

2) $\frac{2}{6x+1}+\frac{3}{6x-1}=\frac{30x+9}{36x^2-1};$

3) $\frac{6x+14}{x^2-9}+\frac{7}{x^2+3x}=\frac{6}{x-3};$

4) $\frac{2y^2+5}{1-y^2}+\frac{y+1}{y-1}=\frac{4}{y+1};$

5) $\dfrac{2x-1}{2x+1}=\dfrac{2x+1}{2x-1}+\dfrac{4}{1-4x^2}$;

6) $\dfrac{7}{(x+2)(x-3)}-\dfrac{4}{(x-3)^2}=\dfrac{3}{(x+2)^2}$;

7) $\dfrac{2x-1}{x+4}-\dfrac{3x-1}{4-x}=\dfrac{6x+64}{x^2-16}+4$;

8) $\dfrac{2x-6}{x^2-36}-\dfrac{x-3}{x^2-6x}-\dfrac{x-1}{x^2+6x}=0$.

**213.*** Решите уравнение:

1) $\dfrac{x-2}{x+1}-\dfrac{5}{1-x}=\dfrac{x^2+27}{x^2-1}$;

2) $\dfrac{3x+1}{3x-1}-\dfrac{3x-1}{3x+1}=\dfrac{6}{1-9x^2}$;

3) $\dfrac{4}{x-3}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{x-2}$;

4) $\dfrac{2x^2-2x}{x^2-4}+\dfrac{6}{x+2}=\dfrac{x+2}{x-2}$;

5) $\dfrac{7}{x^2+2x}+\dfrac{x+1}{x^2-2x}=\dfrac{x+4}{x^2-4}$;

6) $\dfrac{x^2-9x+50}{x^2-5x}=\dfrac{x+1}{x-5}+\dfrac{x-5}{x}$.

**214.*** Моторная лодка проплыла 8 км по течению реки и вернулась обратно, потратив на весь путь 54 мин. Найдите скорость течения реки, если собственная скорость лодки составляет 18 км/ч.

**215.*** Теплоход прошел 28 км против течения реки и вернулся обратно, потратив на обратный путь на 4 мин меньше. Найдите собственную скорость теплохода, если скорость течения реки равна 1 км/ч.

**216.*** Лодка прошла 6 км против течения реки и 12 км по течению, потратив на весь путь 2 ч. Найдите собственную скорость лодки, если скорость течения реки составляет 3 км/ч.

**217.**** Решите уравнение:

1) $\dfrac{x+5}{x^2-5x}-\dfrac{x-5}{2x^2+10x}=\dfrac{x+25}{2x^2-50}$;

2) $\dfrac{2}{x^2-9}-\dfrac{1}{2x^2-12x+18}=\dfrac{3}{2x^2+6x}$;

3) $\dfrac{9x+12}{x^3-64}-\dfrac{1}{x-4}=\dfrac{1}{x^2+4x+16}$.

**218.**** Решите уравнение:

1) $\dfrac{4y+24}{5y^2-45}+\dfrac{y+3}{5y^2-15y}=\dfrac{y-3}{y^2+3y}$;

2) $\dfrac{y+2}{8y^3+1}-\dfrac{1}{4y+2}=\dfrac{y+3}{8y^2-4y+2}$.

**219.*** Для каждого значения $a$ решите уравнение:

1) $\dfrac{x-1}{x-a}=0$;

2) $\dfrac{x-a}{x+5}=0$;

3) $\dfrac{a(x-a)}{x-3}=0$;

4) $\dfrac{(x-a)(x-6)}{x-7}=0$;

5) $\dfrac{(x-4)(x+2)}{x-a}=0$;

6) $\dfrac{x-a}{(x-4)(x+2)}=0$.

**220.*** При каких значениях $a$ уравнение $\dfrac{x+a}{x^2-4}=0$ не имеет корней?

**221.*** При каких значениях $a$ уравнение $\dfrac{(x-a)(x-3a)}{x+9}=0$ имеет один корень?

## УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

**222.** На конец года численность населения города составляла 72 100 жителей. Определите количество жителей в этом городе на начало года, если прирост населения за это время составил 3 %.

**223.** Расстояние между двумя станциями электропоезд проходит за 45 мин. Если его скорость увеличить на 10 км/ч, то он пройдет это расстояние за 40 мин. Каково расстояние между станциями?

**224.** Докажите, что при любых значениях переменных данное выражение принимает неотрицательные значения:

1) $(a-5)^2-2(a-5)+1$; 2) $(a-b)(a-b-8)+16$.

**225.** Найдите значение функции $f(x)=3x-7$ при: 1) $x=-3$; 2) $x=2\frac{1}{3}$. При каком значении аргумента значение функции равно 0,2?

## ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

**226.** Найдите значение выражения:

1) $4^3+3^4$; 2) $(-8)^2-(-1)^{12}$; 3) $9\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)^2$; 4) $(2{,}8-3{,}1)^3\cdot\left(-1\frac{2}{3}\right)^2$.

**227.** Не выполняя вычислений, сравните значения выражений:

1) $(-5{,}7)^2$ и 0; 2) 0 и $(-6{,}9)^3$; 3) $(-23)^5$ и $(-2)^4$; 4) $-8^8$ и $(-8)^8$.

**228.** Представьте в виде степени:

1) с основанием 2 числа 4; 8; 16; 32; 64;

2) с основанием 10 числа 100; 1000; 10 000; 1 000 000.

**229.** Найдите значение выражения:

1) $18a^2$, если $a=-\frac{1}{6}$; 3) $16+b^4$, если $b=-2$;

2) $(18a)^2$, если $a=-\frac{1}{6}$; 4) $(16+b)^4$, если $b=-2$.

**Повторите содержание п. 3 на с. 232.**

## УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

**230.** Существует ли натуральное число, которое при умножении на 2 дает в результате квадрат натурального числа, а при умножении на 3 — куб натурального числа?

# 8. Степень с целым отрицательным показателем

Часто для записи больших чисел в компактном виде используют степень с натуральным показателем. Например,

$$129\ 140\ 163 = 3^{17},$$
$$282\ 475\ 249 = 7^{10}.$$

В науке и практике для краткой записи больших значений величин используют степень числа 10.

Например, расстояние от Земли до Полярной звезды приблизительно равно 4 470 000 000 000 000 км, или $4,47 \cdot 10^{15}$ км. Масса Солнца равна 1 990 000 000 000 000 000 000 000 000 000 кг, или $1,99 \cdot 10^{30}$ кг.

Это были примеры из макромира, то есть мира очень больших физических величин. Приведем примеры из микромира, то есть мира очень маленьких физических величин.

Масса атома Гидрогена равна

$$0,000000000000000000000000001661 \text{ кг}.$$

Радиус атома Оксигена равен 0,0000000066 см.

Для записи этих величин точно так же можно использовать степень числа 10. Имеем:

$$0,000000000000000000000000001661 \text{ кг} = \frac{1,661}{10^{27}} \text{ кг},$$

$$0,0000000066 \text{ см} = \frac{6,6}{10^{9}} \text{ см}.$$

Однако если договориться обозначить $\frac{1}{10^{27}}$ и $\frac{1}{10^{9}}$ соответственно $10^{-27}$ и $10^{-9}$, то для рассмотренных величин получим «одноэтажную» форму записи: $\frac{1,661}{10^{27}} = 1,661 \cdot 10^{-27}$, $\frac{6,6}{10^{9}} = 6,6 \cdot 10^{-9}$.

Аналогично можно договориться, что, например, $\frac{1}{5^2} = 5^{-2}$, $\frac{1}{(-3)^5} = (-3)^{-5}$, $\frac{1}{0,7} = (0,7)^{-1}$.

**Определение. Для любого числа $a$, не равного нулю, и натурального числа $n$**

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Из определения следует, что, например, $2^{-3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$, $(-4)^{-2}=$ $=\frac{1}{(-4)^2}=\frac{1}{16}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^4}=16$, $(0,3)^{-1}=\frac{1}{0,3}=\frac{10}{3}$.

Итак, мы можем возводить число в любую целую степень, кроме нуля. Заполним этот пробел.

**Определение. Для любого числа $a$, не равного нулю, $a^0=1$.**

Например, $5^0=1$, $(-17)^0=1$, $\left(-\frac{4}{3}\right)^0=1$, $\pi^0=1$.

*Выражение $0^n$ при целых $n$, меньших или равных нулю, не имеет смысла.*

Из данных определений следует, что при любом $a\neq 0$ и целом $n$ числа $a^n$ и $a^{-n}$ являются взаимно обратными. Поэтому равенство

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$$

выполняется при любом целом $n$.

Например, при $n=-2$ имеем: $a^2=\frac{1}{a^{-2}}$.

В справочной литературе вы можете найти следующую информацию: «Масса Венеры равна $4,9\cdot10^{24}$ кг. Масса Марса равна $6,423\cdot10^{23}$ кг. Площадь поверхности Луны равна $3,8\cdot10^7$ км².» Числа, выражающие эти величины, записаны в так называемом **стандартном виде**.

**Определение. Стандартным видом числа называют его запись в виде произведения $a\cdot10^n$, где $1\leqslant a<10$ и $n$ — целое число.**

Число $n$ называют **порядком** числа, записанного в стандартном виде. Например, порядок числа, выражающего массу Солнца в килограммах, равен 30, а порядок числа, выражающего массу атома Гидрогена в килограммах, равен $-27$.

В стандартном виде можно записать любое положительное число. Например, $171,25=1,7125\cdot10^2$; $0,00958=9,58\cdot10^{-3}$. Однако на практике стандартный вид числа используют для записи больших и малых значений величин. При этом порядок числа дает представление о величине. Например, если порядок числа $m$ равен 3, то есть $m=a\cdot10^3$, то с учетом того, что $1\leqslant a<10$, получаем: $10^3\leqslant m<10^4$.

**ПРИМЕР 1** Найдите значение выражения: 1) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-1}$; 2) $1{,}2^{-2}$; 3) $3^{-3}\cdot 15+6^{-2}\cdot 8-4{,}3^{0}$.

*Решение.* 1) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-1}=\frac{1}{\frac{4}{7}}=\frac{7}{4}$.

И вообще, если $a\neq 0$ и $b\neq 0$, то $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}=\frac{b}{a}$.

2) $1{,}2^{-2}=\left(\frac{12}{10}\right)^{-2}=\left(\frac{6}{5}\right)^{-2}=\left(\frac{5}{6}\right)^{2}=\frac{25}{36}$.

3) $3^{-3}\cdot 15+6^{-2}\cdot 8-4{,}3^{0}=\frac{1}{3^{3}}\cdot 15+\frac{1}{6^{2}}\cdot 8-1=\frac{1}{27}\cdot 15+\frac{1}{36}\cdot 8-1=$

$=\frac{5}{9}+\frac{2}{9}-1=-\frac{2}{9}$. ▲

**ПРИМЕР 2** Представьте выражение $(a-b)^{-2}(a^{-2}-b^{-2})$ в виде рациональной дроби.

*Решение.* $(a-b)^{-2}(a^{-2}-b^{-2})=\frac{1}{(a-b)^{2}}\cdot\left(\frac{1}{a^{2}}-\frac{1}{b^{2}}\right)=\frac{1}{(a-b)^{2}}\cdot\frac{b^{2}-a^{2}}{a^{2}b^{2}}=$

$=\frac{1}{(b-a)^{2}}\cdot\frac{(b-a)(b+a)}{a^{2}b^{2}}=\frac{b+a}{a^{2}b^{2}(b-a)}=\frac{b+a}{a^{2}b^{3}-a^{3}b^{2}}$. ▲

**ПРИМЕР 3** Запишите в стандартном виде число: 1) 564 000 000; 2) 0,0036.

*Решение.* 1) $564\,000\,000 = 5{,}64\cdot 100\,000\,000 = 5{,}64\cdot 10^{8}$.

$0{,}0036=3{,}6\cdot 0{,}001=3{,}6\cdot\frac{1}{1000}=3{,}6\cdot\frac{1}{10^{3}}=3{,}6\cdot 10^{-3}$. ▲

**?**

1. Чему равно $a^{-n}$ для любого отличного от нуля числа $a$ и натурального числа $n$?
2. Чему равна нулевая степень любого отличного от нуля числа?
3. Что называют стандартным видом числа?
4. Как в записи числа в стандартном виде $a\cdot 10^{n}$ называют число $n$?

## УПРАЖНЕНИЯ

**231.°** Какому из выражений равно выражение $a^{-6}$:

1) $-a^{6}$; 2) $\frac{1}{a^{-6}}$; 3) $\frac{1}{a^{6}}$; 4) $-\frac{1}{a^{6}}$?

**232.°** Представьте степень в виде дроби:

1) $3^{-8}$; 3) $a^{-9}$; 5) $12^{-1}$; 7) $(a-b)^{-2}$;
2) $5^{-6}$; 4) $d^{-8}$; 6) $m^{-1}$; 8) $(2x-3y)^{-4}$.

**233.°** Замените степень дробью:

1) $14^{-4}$; 2) $p^{-20}$; 3) $(m+n)^{-1}$; 4) $(4c-5d)^{-10}$.

**234.°** Представьте дробь в виде степени с целым отрицательным показателем или в виде произведения степеней:

1) $\frac{1}{7^2}$; 3) $\frac{1}{c}$; 5) $\frac{a}{b}$; 7) $\frac{(a+b)^5}{(c-d)^8}$;
2) $\frac{1}{x^5}$; 4) $\frac{m}{n^3}$; 6) $\frac{x^6}{y^7}$; 8) $\frac{(x-y)^2}{x+y}$.

**235.°** Замените дробь степенью с целым отрицательным показателем или произведением степеней:

1) $\frac{1}{11^{11}}$; 2) $\frac{1}{k^4}$; 3) $\frac{x^2}{y}$; 4) $\frac{m^6}{n^6}$; 5) $\frac{(2x-y)^3}{(x-2y)^9}$.

**236.°** Представьте числа 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$ в виде степени с основанием: 1) 2; 2) $\frac{1}{2}$.

**237.°** Представьте в виде степени однозначного натурального числа дробь:

1) $\frac{1}{49}$; 2) $\frac{1}{216}$; 3) $\frac{1}{625}$; 4) $\frac{1}{128}$.

**238.°** Представьте в виде степени с основанием 10 число:

1) 0,1; 2) 0,01; 3) 0,0001; 4) 0,000001.

**239.°** Представьте числа 1, 3, 9, 27, 81, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{81}$ в виде степени с основанием: 1) 3; 2) $\frac{1}{3}$.

**240.°** Вычислите:

1) $5^{-2}$; 3) $(-9)^{-2}$; 5) $1^{-24}$; 7) $(-1)^{-17}$; 9) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$;
2) $2^{-4}$; 4) $0{,}2^{-3}$; 6) $(-1)^{-16}$; 8) $\left(\frac{7}{8}\right)^{0}$; 10) $\left(-1\frac{1}{6}\right)^{-2}$.

**241.°** Найдите значение выражения:

1) $20^{-2}$; 2) $0{,}3^{-1}$; 3) $(-6)^{-3}$; 4) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-2}$; 5) $\left(-\frac{1}{6}\right)^{-3}$; 6) $\left(3\frac{1}{3}\right)^{-2}$.

**242.°** Вычислите значение выражения:

1) $3^{-1} - 4^{-1}$;
2) $2^{-3} + 6^{-2}$;
3) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-1} + (-2,3)^0 - 5^{-2}$;
4) $9 \cdot 0,1^{-1}$;
5) $0,5^{-2} \cdot 4^{-1}$;
6) $(2^{-1} - 8^{-1} \cdot 16)^{-1}$.

**243.°** Чему равно значение выражения:

1) $2^{-2} + 2^{-1}$;
2) $3^{-2} - 6^{-1}$;
3) $0,03^0 + 0,7^0$;
4) $(9 \cdot 3^{-3} - 12^{-1})^{-1}$?

**244.°** Какое из данных чисел записано в стандартном виде:

1) $12 \cdot 10^4$;
2) $1,2 \cdot 10^4$;
3) $0,12 \cdot 10^4$?

**245.°** Запишите число в стандартном виде и укажите порядок числа:

1) 3400;
2) 15;
3) 0,0046;
4) 0,000008;
5) 0,73;
6) $250 \cdot 10^2$;
7) $0,86 \cdot 10^3$;
8) $0,23 \cdot 10^4$;
9) $9300 \cdot 10^5$.

**246.°** Используя стандартный вид числа, запишите:

1) скорость света в вакууме равна 300 000 км/с;
2) высота Говерлы, самой высокой горы Украины, равна 2061 м;
3) площадь Украины составляет 603 700 км$^2$;
4) среднее расстояние от Земли до Солнца составляет 149,6 млн км;
5) атмосферное давление на высоте 100 км составляет 0,032 Па;
6) диаметр молекулы воды равен 0,00000028 мм.

**247.°** Запишите число в стандартном виде и укажите порядок числа:

1) 45 000;
2) 260;
3) 0,00024;
4) 0,032;
5) $0,059 \cdot 10^3$;
6) $526 \cdot 10^4$.

**248.°** Число представлено в стандартном виде. Запишите его в виде натурального числа или десятичной дроби:

1) $1,6 \cdot 10^3$;
2) $5,7 \cdot 10^6$;
3) $2,1 \cdot 10^{-2}$;
4) $1,1 \cdot 10^{-5}$.

**249.°** Число представлено в стандартном виде. Запишите его в виде натурального числа или десятичной дроби:

1) $2,4 \cdot 10^2$;
2) $4,8 \cdot 10^5$;
3) $1,4 \cdot 10^{-3}$;
4) $8,6 \cdot 10^{-4}$.

**250.•** Докажите, что $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$.

**251.•** Найдите значение выражения:

1) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1} \cdot 10^{-1} + 9^0 - (-2)^3 + \left(\frac{2}{9}\right)^{-2} \cdot (-1,5)^{-3}$.

2) $(2,5)^{-2} - (8^5)^0 + \left(1\frac{2}{3}\right)^{-3} + 0,1^{-1}$.

**252.**° Расположите выражения в порядке убывания их значений:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^3,\ \left(\frac{1}{2}\right)^0,\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-1},\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$;  2) $4^{-1},\ 4^3,\ 4^0,\ 4^{-2}$.

**253.**° Расположите выражения в порядке возрастания их значений:

1) $7^{-2},\ 7^2,\ 7^{-1},\ 7^0$;  2) $\left(\frac{1}{3}\right)^2,\ \left(\frac{1}{3}\right)^{-3},\ \left(\frac{1}{3}\right)^0,\ \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$.

**254.**° Сравните значения выражений:

1) $12^0$ и $(-6)^0$;
2) $0{,}2^3$ и $0{,}2^{-3}$;
3) $4^6$ и $0{,}25^{-6}$;
4) $3^{-1}\cdot 7^{-1}$ и $21^{-1}$;
5) $5^{-1}-7^{-1}$ и $2^{-1}$;
6) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ и $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)^{-1}$.

**255.**° Сравните значения выражений:

1) $3^{-2}$ и $(-3)^0$;
2) $3^{-1}+2^{-1}$ и $5^{-1}$;
3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}-\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$ и $\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)^{-2}$.

**256.**° Представьте в виде дроби выражение:

1) $ab^{-1}+a^{-1}b$;
2) $3a^{-1}+ab^{-2}$;
3) $m^2n^2(m^{-3}-n^{-3})$;
4) $(a+b)^{-1}\cdot(a^{-1}+b^{-1})$;
5) $(c^{-2}-d^{-2}):(c+d)$;
6) $(xy^{-2}+x^{-2}y)\cdot\left(\frac{x^2-xy+y^2}{x}\right)^{-1}$.

**257.**° Представьте в виде дроби выражение:

1) $a^{-2}+a^{-3}$;
2) $mn^{-4}+m^{-4}n$;
3) $(c^{-1}-d^{-1})\cdot(c-d)^{-2}$;
4) $(x^{-2}+y^{-2})\cdot(x^2+y^2)^{-1}$.

**258.**° Порядок некоторого натурального числа равен 4. Сколько цифр содержит десятичная запись этого числа?

**259.**° Десятичная запись некоторого натурального числа состоит из семи цифр. Чему равен порядок этого числа?

**260.**° Какое число больше:

1) $9{,}7\cdot 10^{11}$ или $1{,}2\cdot 10^{12}$;
2) $3{,}6\cdot 10^{-5}$ или $4{,}8\cdot 10^{-6}$;
3) $2{,}34\cdot 10^{6}$ или $0{,}23\cdot 10^{7}$;
4) $42{,}7\cdot 10^{-9}$ или $0{,}072\cdot 10^{-7}$?

**261.**° Какое число меньше:

1) $6{,}1\cdot 10^{19}$ или $6{,}15\cdot 10^{18}$;  2) $1{,}5\cdot 10^{-9}$ или $0{,}9\cdot 10^{-8}$?

**262.**° В таблице приведены расстояния от Солнца до планет Солнечной системы.

| Планета | Расстояние, км |
| --- | --- |
| Венера | $1{,}082 \cdot 10^8$ |
| Земля | $1{,}495 \cdot 10^8$ |
| Марс | $2{,}280 \cdot 10^8$ |
| Меркурий | $5{,}790 \cdot 10^7$ |
| Нептун | $4{,}497 \cdot 10^9$ |
| Сатурн | $1{,}427 \cdot 10^9$ |
| Уран | $2{,}871 \cdot 10^9$ |
| Юпитер | $7{,}781 \cdot 10^8$ |

1) Какая планета находится на наименьшем расстоянии от Солнца, а какая — на наибольшем?
2) Какая из планет, Марс или Сатурн, находится дальше от Солнца?
3) Составьте таблицу, записав в левом столбце названия планет в порядке увеличения расстояния от них до Солнца, а в правом — расстояния от них до Солнца, выраженные в миллионах километров.

**263.*** В таблице приведены массы атомов некоторых химических элементов.

| Элемент | Масса атома, кг | Элемент | Масса атома, кг |
| --- | --- | --- | --- |
| Нитроген | $2{,}32 \cdot 10^{-26}$ | Аурум | $3{,}27 \cdot 10^{-25}$ |
| Алюминий | $4{,}48 \cdot 10^{-26}$ | Купрум | $1{,}05 \cdot 10^{-25}$ |
| Гидроген | $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ | Натрий | $3{,}81 \cdot 10^{-26}$ |
| Гелий | $6{,}64 \cdot 10^{-27}$ | Станум | $1{,}97 \cdot 10^{-25}$ |
| Феррум | $9{,}28 \cdot 10^{-26}$ | Уран | $3{,}95 \cdot 10^{-25}$ |

1) Масса атома какого из данных элементов наименьшая, а какого — наибольшая?
2) Масса атома какого из элементов, Купрума или Натрия, больше?
3) Составьте таблицу, упорядочив элементы в порядке уменьшения массы их атомов.

**264.*** В таблице приведены запасы некоторых веществ в минеральных ресурсах мира.

| Вещество | Запасы, т | Вещество | Запаси, т |
|---|---|---|---|
| Алюминий | $1{,}1\cdot10^9$ | Никель | $6{,}8\cdot10^7$ |
| Вольфрам | $1{,}3\cdot10^6$ | Олово | $4{,}76\cdot10^6$ |
| Железо | $8{,}8\cdot10^{10}$ | Ртуть | $1{,}15\cdot10^5$ |
| Золото | $1{,}1\cdot10^4$ | Фосфаты | $1{,}98\cdot10^{10}$ |
| Марганец | $6{,}35\cdot10^8$ | Хром | $4{,}4\cdot10^9$ |
| Медь | $2{,}8\cdot10^9$ | Цинк | $1{,}12\cdot10^8$ |

1) Запасы какого из данных веществ наибольшие, а какого — наименьшие?
2) Запасы какого из веществ, никеля или цинка, больше?
3) Составьте таблицу минеральных ресурсов, разместив вещества в порядке уменьшения их запасов.

## УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

**265.** Масса чугунной болванки 16 кг. Какое наименьшее количество болванок потребуется, чтобы отлить 41 деталь массой 12 кг каждая?

**266.** В некотором городе на сегодняшний день проживает 88 200 жителей. Сколько жителей было в этом городе 2 года назад, если ежегодный прирост населения составлял 5 %?

**267.** Дима ходит из дома на стадион пешком со скоростью 4 км/ч. Если он поедет на стадион на велосипеде со скоростью 12 км/ч, то приедет на 20 мин раньше, чем обычно. На каком расстоянии от дома Димы находится стадион?

**268.** Упростите выражение

$$\frac{2a^2+2}{a^2-1}-\frac{a+1}{a-1}+\frac{3a-3}{2a+2}.$$

**269.** Можно ли утверждать, что при любом натуральном $n$ значение выражения $(5n+6{,}5)^2-(2n+0{,}5)^2$ кратно 42?

## ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

**270.** Представьте в виде степени с основанием $a$ выражение:

1) $a^7 \cdot a^5$; 2) $a^7 : a^5$; 3) $(a^7)^5$; 4) $\dfrac{(a^3)^6 \cdot a^4}{a^{16}}$.

**271.** Упростите выражение:

1) $-4m^3n^5 \cdot 5m^4n^2$; 2) $(-2m^7n^2)^4$; 3) $8x^3y^4 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}x^2y^5\right)^3$.

**272.** Найдите значение выражения:

1) $\dfrac{3^{10} \cdot 27^3}{9^9}$; 2) $\left(5\dfrac{1}{3}\right)^7 \cdot \left(\dfrac{3}{16}\right)^8$.

**Повторите содержание п. 4 на с. 232.**

## УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

**273.** В некотором доме живут только супружеские пары с маленькими детьми, причем у каждого мальчика есть сестра и мальчиков больше, чем девочек. Может ли взрослых быть больше, чем детей?

# 9. Свойства степени с целым показателем

В 7 классе вы изучали свойства степени с натуральным показателем. Они справедливы и для степени с любым целым показателем.

**Теорема 9.1.** ***Для любого $a \neq 0$ и любых целых $m$ и $n$ выполняются равенства:***

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \tag{1}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}. \tag{2}$$

**Теорема 9.2.** ***Для любых $a \neq 0$ и $b \neq 0$ и любого целого $n$ выполняется равенство***

$$(ab)^n = a^n b^n. \tag{3}$$

Равенство (1) выражает **основное свойство степени**. Докажем его.

Для натуральных $m$ и $n$ это равенство уже было доказано в курсе алгебры 7 класса.

Рассмотрим теперь случай, когда $m$ и $n$ — целые отрицательные числа.

Если $m$ и $n$ — целые отрицательные числа, то $-m$ и $-n$ — натуральные числа. Тогда $a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{-m+(-n)} = a^{-m-n}$.

Имеем: $a^m \cdot a^n = \frac{1}{a^{-m}} \cdot \frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{a^{-m} \cdot a^{-n}} = \frac{1}{a^{-m-n}} = \frac{1}{a^{-(m+n)}} = a^{m+n}$.

Для завершения доказательства основного свойства степени следует также рассмотреть следующие случаи: один из показателей степени $m$ или $n$ отрицательный, а другой — положительный; один или оба показателя равны нулю. Рассмотрите эти случаи самостоятельно.

Равенства (2) и (3) можно доказать аналогично.

С помощью свойства (1) докажем следующую теорему.

**Теорема 9.3.** ***Для любого $a \neq 0$ и любых целых $m$ и $n$ выполняется равенство***

$$a^m : a^n = a^{m-n}. \tag{4}$$

*Доказательство.* Имеем:

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^m \cdot a^{-n} = a^{m+(-n)} = a^{m-n}. \blacktriangle$$

С помощью свойств (2) и (3) докажем следующую теорему.

**Теорема 9.4.** ***Для любых $a \neq 0$ и $b \neq 0$ и любого целого $n$ выполняется равенство***

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}. \tag{5}$$

*Доказательство.* Имеем:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = (a \cdot b^{-1})^n = a^n \cdot (b^{-1})^n = a^n \cdot b^{-n} = \frac{a^n}{b^n}. \blacktriangle$$

Свойства (1)–(5) называют **свойствами степени с целым показателем**.

**ПРИМЕР 1** Представьте в виде степени с основанием $a$ выражение: 1) $a^{-14} \cdot a^{12}$; 2) $a^{-5} : a^{-9}$; 3) $(a^{-4})^{-2} \cdot a^{-7} : a^6$.

*Решение.* 1) Применив основное свойство степени, получаем:

$$a^{-14} \cdot a^{12} = a^{-14+12} = a^{-2}.$$

2) Используя равенство $a^m : a^n = a^{m-n}$, получаем:

$$a^{-5} : a^{-9} = a^{-5-(-9)} = a^{-5+9} = a^4.$$

3) Применив последовательно правила возведения степени в степень (свойство (2)), умножения и деления степеней с одинаковыми основаниями (свойства (1) и (4)), получаем:

$$(a^{-4})^{-2} \cdot a^{-7} : a^{6} = a^{-4\cdot(-2)} \cdot a^{-7} : a^{6} = a^{8} \cdot a^{-7} : a^{6} = a^{8+(-7)-6} = a^{-5}. \ \blacktriangle$$

**ПРИМЕР 2** Найдите значение выражения:

1) $(5^{-5})^{-4} : (5^{-7})^{-3}$; 2) $16^{-9} \cdot 8^{12}$; 3) $\dfrac{6^{-3}}{18^{-3}}$; 4) $\left(1\dfrac{11}{25}\right)^{-8} \cdot \left(\left(\dfrac{5}{6}\right)^{3}\right)^{-5}$.

*Решение.* 1) Имеем: $(5^{-5})^{-4} : (5^{-7})^{-3} = 5^{20} : 5^{21} = 5^{-1} = \dfrac{1}{5}$.

2) Представив числа 16 и 8 в виде степеней с основанием 2, получаем:

$$16^{-9} \cdot 8^{12} = (2^{4})^{-9} \cdot (2^{3})^{12} = 2^{-36} \cdot 2^{36} = 2^{0} = 1.$$

3) Используя правило возведения дроби в степень (свойство (5)), получаем: $\dfrac{6^{-3}}{18^{-3}} = \left(\dfrac{6}{18}\right)^{-3} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3} = 3^{3} = 27.$

$$4)\ \left(1\frac{11}{25}\right)^{-8} \cdot \left(\left(\frac{5}{6}\right)^{3}\right)^{-5} = \left(\frac{36}{25}\right)^{-8} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-15} = \left(\left(\frac{6}{5}\right)^{2}\right)^{-8} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-15} =$$

$$= \left(\frac{6}{5}\right)^{-16} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-15} = \left(\frac{5}{6}\right)^{16} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-15} = \frac{5}{6}. \ \blacktriangle$$

**ПРИМЕР 3** Упростите выражение: 1) $0{,}6m^{2}n^{-6} \cdot \dfrac{1}{3}m^{-4}n^{3}$;

2) $(a^{-2} + 9)(a^{-2} - 4) - (a^{-2} + 6)(a^{-2} - 6)$.

*Решение*

1) $0{,}6m^{2}n^{-6} \cdot \dfrac{1}{3}m^{-4}n^{3} = \left(0{,}6 \cdot \dfrac{1}{3}\right) \cdot (m^{2} \cdot m^{-4}) \cdot (n^{-6} \cdot n^{3}) = 0{,}2m^{-2}n^{-3}$.

2) $(a^{-2} + 9)(a^{-2} - 4) - (a^{-2} + 6)(a^{-2} - 6) = a^{-4} - 4a^{-2} + 9a^{-2} - 36 - a^{-4} + 36 = 5a^{-2}$. $\blacktriangle$

**ПРИМЕР 4** Выполните умножение $(3{,}4 \cdot 10^{14}) \cdot (7 \cdot 10^{-8})$ и результат запишите в стандартном виде.

*Решение*

$$(3{,}4 \cdot 10^{14}) \cdot (7 \cdot 10^{-8}) = (3{,}4 \cdot 7) \cdot (10^{14} \cdot 10^{-8}) =$$

$$= 23{,}8 \cdot 10^{6} = 2{,}38 \cdot 10 \cdot 10^{6} = 2{,}38 \cdot 10^{7}. \ \blacktriangle$$

?

Сформулируйте свойства степени с целым показателем.

## УПРАЖНЕНИЯ

**274.°** Представьте выражение в виде степени с основанием $a$ или произведения степеней с разными основаниями:

1) $a^{-6}\cdot a^{9}$;
2) $a^{5}\cdot a^{-8}$;
3) $a^{-5}\cdot a^{10}\cdot a^{-12}$;
4) $a^{-2} : a^{6}$;
5) $a^{7} : a^{-3}$;
6) $a^{-8} : a^{-15}$;
7) $a^{12}\cdot a^{-20} : a^{-9}$;
8) $(a^{-5})^{4}$;
9) $(a^{-6})^{-3}$;
10) $(a^{2})^{-4}\cdot(a^{-3})^{-2} : (a^{-3})^{3}$;
11) $(a^{4}b^{-2}c^{3})^{-10}$;
12) $\left(\dfrac{a^{10}b^{-7}}{c^{6}d^{-14}}\right)^{-2}$.

**275.°** Представьте выражение в виде степени с основанием $a$ или произведения степеней с разными основаниями:

1) $a^{6}\cdot a^{-10}$;
2) $a^{4} : a^{7}$;
3) $a^{-5} : a^{-9}$;
4) $(a^{-2})^{6}$;
5) $(a^{-3}b^{-1}c^{7})^{-4}$;
6) $\left(\dfrac{a^{2}}{bc^{-1}}\right)^{-3}$;
7) $a^{-16}\cdot a^{8} : a^{-4}$;
8) $(a^{-3})^{5} : (a^{-1})^{7}\cdot(a^{-7})^{-4}$.

**276.°** Найдите значение выражения:

1) $9^{5}\cdot 9^{-7}$;
2) $10^{-8}\cdot 10^{12}$;
3) $3^{-18} : 3^{-21}$;
4) $2^{-9}\cdot 2^{-12} : 2^{-22}$;
5) $(17^{4})^{-12}\cdot(17^{-6})^{-8}$;
6) $\dfrac{6^{-5}\cdot(6^{-3})^{4}}{(6^{-7})^{2}\cdot 6^{-3}}$;
7) $3^{-3}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3}$;
8) $\dfrac{14^{-5}}{7^{-5}}$.

**277.°** Найдите значение выражения:

1) $6^{-9}\cdot 6^{6}$;
2) $7^{-16} : 7^{-18}$;
3) $5^{-7} : 5^{-6}\cdot 5^{3}$;
4) $\dfrac{4^{-7}\cdot(4^{-5})^{3}}{(4^{-3})^{7}}$;
5) $0{,}8^{-4}\cdot\left(1\dfrac{1}{4}\right)^{-4}$;
6) $\dfrac{11^{-2}}{22^{-2}}$.

**278.°** Упростите выражение:

1) $3a^{-3}\cdot 4a^{-4}$;
2) $\dfrac{10b^{-4}}{15b^{-5}}$;
3) $(2c^{-6})^{4}$;
4) $m^{-2}n\cdot mn^{-2}$;
5) $abc^{-1}\cdot ab^{-1}c$;
6) $\dfrac{kp^{-6}}{k^{4}p^{4}}$;
7) $(c^{-6}d^{2})^{-7}$;
8) $\dfrac{1}{3}a^{-3}b^{-6}\cdot\dfrac{6}{7}a^{7}b^{4}$;
9) $0{,}2c^{-3}d^{5}\cdot 1{,}5c^{-2}d^{-5}$;
10) $4x^{8}\cdot(-3x^{-2}y^{4})^{-2}$;
11) $\dfrac{13m^{-10}}{12n^{-3}}\cdot\dfrac{27n}{26m^{2}}$;
12) $\dfrac{18p^{-6}k^{2}}{7} : \dfrac{15k^{-2}}{p^{6}}$.

**279.°** Упростите выражение:

1) $2a^{-5}b^{2}\cdot 3a^{-2}b^{-5}$;
3) $\dfrac{3{,}6a^{2}b}{0{,}9a^{3}b^{-3}}$;
5) $\dfrac{25x^{-3}}{y^{-4}}\cdot\dfrac{y^{4}}{5x^{-7}}$;

2) $\left(\dfrac{1}{2}mn^{-3}\right)^{-2}$;
4) $0{,}8a^{-6}b^{8}\cdot 5a^{10}b^{-8}$;
6) $28c^{3}d^{-2}\cdot(2cd^{-1})^{-2}$.

**280.•** Найдите значение выражения:

1) $8^{-3}\cdot 2^{7}$;
4) $\left(2\dfrac{1}{4}\right)^{-4}\cdot\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^{3}\right)^{-3}$;
7) $\dfrac{6^{-10}}{81^{-2}\cdot 16^{-3}}$;

2) $27^{-2} : 9^{-4}$;
5) $25^{-4} : (0{,}2^{-3})^{-2}$;
8) $\dfrac{14^{6}\cdot 2^{-7}}{28^{-2}\cdot 7^{8}}$.

3) $100^{-2} : 1000^{-5}\cdot 0{,}01^{6}$;
6) $\dfrac{(-36)^{-3}\cdot 6^{8}}{216^{-5}\cdot(-6)^{18}}$;

**281.•** Найдите значение выражения:

1) $9^{-4}\cdot 27^{3}$;
3) $\left(2\dfrac{7}{9}\right)^{-7}\cdot\left(\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-3}\right)^{5}$;
5) $\dfrac{22^{6}\cdot 2^{-8}}{44^{-3}\cdot 11^{9}}$;

2) $32^{-5} : 64^{-4}$;
4) $8^{-2} : 0{,}5^{4}$;
6) $\dfrac{10^{-2}\cdot 15^{-4}}{30^{-6}}$.

**282.•** Выполните действия и приведите полученное выражение к виду, не содержащему степени с отрицательным показателем:

1) $-2{,}4a^{-4}b^{3}\cdot(-2a^{-3}c^{-5})^{-3}$;
4) $\left(-\dfrac{1}{6}a^{-3}b^{-6}\right)^{-3}\cdot(-6a^{2}b^{9})^{-2}$;

2) $(-10x^{-2}yz^{-3})^{-2}\cdot(0{,}1yz^{-4})^{-2}$;
5) $\left(\dfrac{7p^{-3}}{5k^{-1}}\right)^{-2}\cdot 49m^{-6}n^{4}$;

3) $1\dfrac{7}{9}m^{-6}n\cdot\left(1\dfrac{1}{3}m^{-1}n^{-4}\right)^{-3}$;
6) $\left(\dfrac{4x^{-5}}{3y^{-2}}\right)^{-3}\cdot(16x^{-6}y^{4})^{2}$.

**283.•** Выполните действия и приведите полученное выражение к виду, не содержащему степени с отрицательным показателем:

1) $3{,}6a^{-3}b^{4}\cdot(-3a^{-3}b^{-7})^{-2}$;
3) $\left(\dfrac{5m^{-4}}{6n^{-1}}\right)^{-3}\cdot 125m^{-10}n^{2}$;

2) $1\dfrac{9}{16}x^{-6}y^{2}\cdot\left(1\dfrac{1}{4}x^{-1}y^{-3}\right)^{-3}$;
4) $\left(\dfrac{7a^{-6}}{b^{5}}\right)^{-2}\cdot(a^{-4}b)^{4}$.

**284.•** Вынесите за скобки степень с основанием $a$ и наименьшим из данных показателей:

1) $a^{3}-2a^{4}$;
2) $a^{-3}-2a^{-4}$;
3) $a^{3}-2a^{-4}$.

**285.**° Вынесите за скобки степень с основанием $b$ и наименьшим из данных показателей:

1) $b^3 + 3b^2$; 2) $b^{-3} + 3b^{-2}$; 3) $b^{-3} + 3b^2$.

**286.**° Представьте в виде произведения выражение:

1) $a^{-2} - 4$;
2) $a^{-4}b^{-6} - 1$;
3) $25x^{-8}y^{-12} - z^{-2}$;
4) $a^{-3} + b^{-3}$;
5) $m^{-4} - 6m^{-2}p^{-1} + 9p^{-2}$;
6) $a^{-3} - 49a^{-2}$.

**287.**° Представьте в виде произведения выражение:

1) $x^{-4} - 25$;
2) $m^{-6} - 8n^{-3}$;
3) $a^{-10} + 8a^{-5}b^{-7} + 16b^{-14}$;
4) $a^{-4} - a^{-2}$.

**288.**° Докажите тождество

$$a^{-8} - b^{-8} = (a^{-1} - b^{-1})(a^{-1} + b^{-1})(a^{-2} + b^{-2})(a^{-4} + b^{-4}).$$

**289.**° Упростите выражение:

1) $(a^{-4} + 3)(a^{-4} - 3) - (a^{-4} + 2)^2$;

2) $\dfrac{m^{-2} - n^{-2}}{m^{-1} + n^{-1}}$;

3) $\dfrac{2x^{-2} + y^{-2}}{3x^{-2} - 3x^{-1}y^{-1}} - \dfrac{x^{-1}}{x^{-1} - y^{-1}}$;

4) $\dfrac{a^{-5} + b^{-5}}{a^{-6}} : \dfrac{a^{-3}b^{-5} + a^{-8}}{a^{-4}}$.

**290.**° Упростите выражение:

1) $(x^{-2} - 1)^2 - (x^{-2} - 4)(x^{-2} + 4)$;

2) $\dfrac{a^{-2} - 10a^{-1}b^{-1} + 25b^{-2}}{a^{-1} - 5b^{-1}}$;

3) $\dfrac{5m^{-2} + n^{-2}}{4m^{-3} + 4m^{-1}n^{-2}} - \dfrac{m^{-1}}{m^{-2} + n^{-2}}$;

4) $\dfrac{b^{-1} + 3c^{-1}}{c^{-2}} \cdot \dfrac{bc}{b^{-2}c^{-1} + 3b^{-1}c^{-2}}$.

**291.**° Порядок числа $a$ равен $-4$. Определите порядок числа:

1) $10a$; 2) $0{,}1a$; 3) $100a$; 4) $0{,}001a$; 5) $10\,000a$; 6) $1\,000\,000a$.

**292.**° Порядок числа $b$ равен 3. Определите порядок числа:

1) $10b$; 2) $0{,}01b$; 3) $0{,}0001b$; 4) $1000b$.

**293.**° Выполните вычисления и запишите результат в стандартном виде:

1) $(1{,}8 \cdot 10^4) \cdot (6 \cdot 10^3)$;

2) $(3 \cdot 10^6) \cdot (5{,}2 \cdot 10^{-9})$;

3) $\dfrac{5{,}4 \cdot 10^5}{9 \cdot 10^3}$;

4) $\dfrac{1{,}7 \cdot 10^{-6}}{3{,}4 \cdot 10^{-4}}$.

**294.**° Выполните вычисления и запишите результат в стандартном виде:

1) $(1{,}6 \cdot 10^{-5}) \cdot (4 \cdot 10^7)$;

2) $(5 \cdot 10^{-3}) \cdot (1{,}8 \cdot 10^{-1})$;

3) $\dfrac{7 \cdot 10^{-4}}{1{,}4 \cdot 10^{-6}}$;

4) $\dfrac{6{,}4 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^{-2}}$.

**295.**° Среднее расстояние от Земли до Солнца равно $1{,}5 \cdot 10^8$ км, а скорость света — $3 \cdot 10^8$ м/с. За сколько минут свет от Солнца достигнет Земли? Ответ округлите до единиц.

**296.**° Плотность меди равна $8{,}9 \cdot 10^3$ кг/м³. Найдите массу медной плитки, длина которой $2{,}5 \cdot 10^{-1}$ м, ширина — 12 см, а высота — 0,02 м.

**297.**° Масса Земли равна $6 \cdot 10^{24}$ кг, а масса Луны — $7{,}4 \cdot 10^{22}$ кг. Во сколько раз масса Луны меньше массы Земли? Ответ округлите до единиц.

**298.**•• Упростите выражение и запишите результат в виде рационального выражения, не содержащего степени с отрицательным показателем:

1) $\left(\dfrac{a^{-1}}{a^{-1}+b^{-1}}-\dfrac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-1}}\right):\left(\dfrac{b}{a^2}\right)^{-1}$;

2) $\dfrac{b^{-2}-2}{b^{-2}}-\dfrac{b^{-4}-4}{b^{-2}}\cdot\dfrac{1}{b^{-2}-2}$;

3) $\dfrac{5c^{-3}}{c^{-3}-3}-\dfrac{c^{-3}+6}{2c^{-3}-6}\cdot\dfrac{90}{c^{-6}+6c^{-3}}$;

4) $\left(\dfrac{m^{-4}}{m^{-4}-4}-\dfrac{3m^{-4}}{m^{-8}-8m^{-4}+16}\right)\cdot\dfrac{16-m^{-8}}{m^{-4}-7}+\dfrac{8m^{-4}}{m^{-4}-4}$.

**299.**•• Упростите выражение и запишите результат в виде рационального выражения, не содержащего степени с отрицательным показателем:

1) $\dfrac{a^{-2}+5}{a^{-4}-6a^{-2}+9}:\dfrac{a^{-4}-25}{4a^{-2}-12}-\dfrac{2}{a^{-2}-5}$;

2) $\left(b^{-1}-\dfrac{5b^{-1}-36}{b^{-1}-7}\right)\cdot\left(2b^{-1}+\dfrac{2b^{-1}}{b^{-1}-7}\right)^{-1}$.

**300.**•• Порядок числа $a$ равен $-4$, а порядок числа $b$ равен 3. Каким может быть порядок значения выражения:

1) $ab$; 2) $a + b$; 3) $a + 10b$; 4) $10a + 0{,}1b$?

**301.**•• Порядок числа $m$ равен 2, а порядок числа $n$ равен 4. Каким может быть порядок значения выражения:

1) $mn$; 2) $0{,}01mn$; 3) $100m + n$; 4) $0{,}01m + n$?

## УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

**302.** Среднее арифметическое двух натуральных чисел равно 18. При делении большего из этих чисел на меньшее получим неполное частное 3 и остаток 4. Найдите эти числа.

**303.** В результате мероприятий по экономии электроэнергии за первый месяц ее расход был уменьшен на 20 %, за второй — на 10 % по сравнению с предыдущим, а за третий — на 5 % по сравнению с предыдущим. На сколько процентов в итоге был уменьшен расход электроэнергии?

**304.** Для откачивания воды из затопленного помещения были задействованы три насоса. Первый из них может откачать всю воду за 12 ч, второй — за 15 ч, а третий — за 20 ч. Сначала в течение 3 ч работали первый и второй насосы, а затем подключили третий насос. За какое время была откачана вся вода?

**305.** Тетрадь стоит 19 грн. У покупателя есть купюры только по 5 грн, а у продавца — только по 2 грн. Может ли покупатель рассчитаться за тетрадь без дополнительного размена денег? В случае утвердительного ответа определите, какое наименьшее количество купюр соответствующего достоинства должны быть у покупателя и у продавца.

## ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

**306.** Найдите значение функции $y=-\frac{14}{x}$, если:

1) $x = 2$; 2) $x = -1$; 3) $x = 3{,}5$; 4) $x = -6$.

**307.** Функция задана формулой $y=\frac{x+2}{x-6}$. Какова область определения данной функции? Заполните таблицу, вычислив соответствующие значения функции:

| $x$ | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | | | | | | | |

**308.** Постройте график функции $y = 2x - 1$. Проходит ли этот график через точку: 1) $A$ (30; 59); 2) $B$ (−15; −29)?

**309.** Не выполняя построения, найдите координаты точки пересечения графиков функций $y = 2{,}7x - 8$ и $y = 1{,}2x + 7$.

**310.** Решите графически систему уравнений

$$\begin{cases} 2x-y=3, \\ 3x+y=7. \end{cases}$$

**Повторите содержание пп. 17–19 на с. 236–237.**

## УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

**311.** По окончании теннисного турнира, который проводили по олимпийской системе (проигравший выбывает), оказалось, что только 32 участника выиграли встреч больше, чем проиграли. Сколько теннисистов участвовало в турнире?

# 10. Функция $y=\frac{k}{x}$ и ее график

В курсе математики 6 класса вы ознакомились с функциональной зависимостью, при которой с **увеличением** (**уменьшением**) одной величины в несколько раз другая величина **уменьшается** (**увеличивается**) во столько же раз. Такую зависимость называют обратной пропорциональностью.

Рассмотрим два примера.

**ПРИМЕР 1** Пусть имеется 500 грн. Обозначим через $x$ грн цену 1 кг товара, а через $y$ кг — количество этого товара, которое можно приобрести за 500 грн.

Зависимость переменной $y$ от переменной $x$ является обратной пропорциональностью: увеличение цены $x$ в несколько раз приводит к уменьшению количества товара $y$ во столько же раз и, наоборот, уменьшение цены приводит к увеличению количества купленного товара.

Этой функциональной зависимости соответствует функция, заданная формулой $y=\frac{500}{x}$. ▲

**ПРИМЕР 2** Рассмотрим прямоугольник, площадь которого равна 18 см², а стороны — $x$ см и $y$ см. Тогда

$$y=\frac{18}{x}.$$

Увеличение (уменьшение) знаменателя $x$ в несколько раз приводит к уменьшению (увеличению) величины $y$ во столько же раз, то есть зависимость переменной $y$ от переменной $x$ является обратной пропорциональностью. ▲

В рассмотренных примерах математической моделью реальных ситуаций является функция, которую можно задать формулой вида $y=\frac{k}{x}$.

**Определение. Функцию, которую можно задать формулой вида $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, называют обратной пропорциональностью.**

Поскольку в выражении $\frac{k}{x}$ допустимыми значениями переменной $x$ являются все числа, кроме 0, то областью определения функции $y = \frac{k}{x}$ также являются все числа, кроме 0.

Рассмотрим функцию $y = \frac{6}{x}$. В таблице приведены некоторые значения аргумента и соответствующие им значения функции.

| $x$ | −6 | −4 | −3 | −2 | −1,5 | −1 | 1 | 1,5 | 2 | 3 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | −1 | −1,5 | −2 | −3 | −4 | −6 | 6 | 4 | 3 | 2 | 1,5 | 1 |

Отметим на координатной плоскости точки, координаты $(x; y)$ которых приведены в таблице (рис. 3).

Чем больше точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $y = \frac{6}{x}$, нам удастся отметить, тем меньше полученная фигура (рис. 4) будет отличаться от графика функции $y = \frac{6}{x}$.

Среди отмеченных точек не может быть точки, абсцисса которой равна нулю, поскольку число 0 не принадлежит области определе-

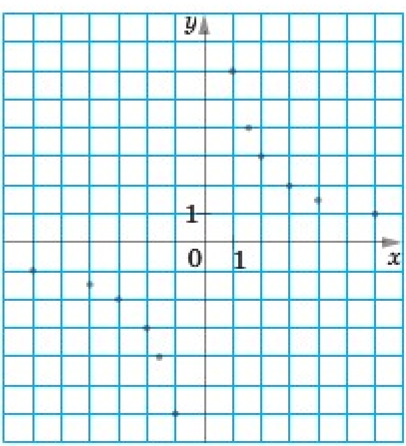



Рис. 3

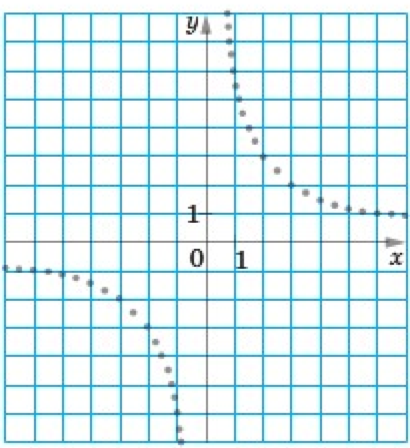



Рис. 4

ния данной функции. Поэтому график функции $y=\frac{6}{x}$ не имеет общих точек с осью ординат.

Кроме того, этот график не имеет общих точек и с осью абсцисс, то есть точек, ординаты которых равны нулю. Действительно, уравнение $\frac{6}{x}=0$ не имеет решений. Следовательно, число 0 не принадлежит области значений данной функции.

Если $x > 0$, то $\frac{6}{x}>0$, то есть $y > 0$; если $x < 0$, то $y < 0$. Следовательно, точки графика данной функции могут находиться только в I и III координатных четвертях.

Заметим, что с увеличением модуля абсциссы расстояния от точек графика функции $y=\frac{6}{x}$ до оси абсцисс уменьшаются и могут стать сколь угодно малыми, но никогда не будут равны нулю. Действительно, чем больше модуль аргумента, тем меньше модуль соответствующего значения функции.

Аналогично можно установить, что с уменьшением модуля абсциссы расстояния от точек графика до оси ординат уменьшаются и могут стать сколь угодно малыми, но никогда не будут равны нулю.

Если бы удалось отметить на координатной плоскости все точки, координаты которых удовлетворяют уравнению $y=\frac{6}{x}$, то мы получили бы фигуру, изображенную на рисунке 5.

Фигуру, являющуюся графиком функции $y=\frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, называют **гиперболой**. Гипербола состоит из двух частей — **ветвей гиперболы**.

Заметим, что если верно равенство $y_0=\frac{k}{x_0}$, то также верно равенство $-y_0=\frac{k}{-x_0}$. Тогда можно сделать следующий вывод: если точка $A\ (x_0;\ y_0)$ принадлежит гиперболе $y=\frac{k}{x}$, то точка $B\ (-x_0;\ -y_0)$ также принадлежит этой гиперболе.

На рисунке 5 изображена гипербола $y=\frac{6}{x}$.

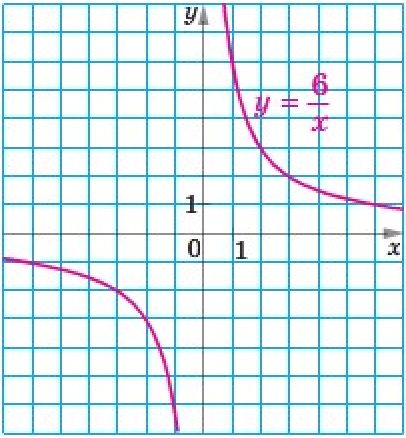



Рис. 5

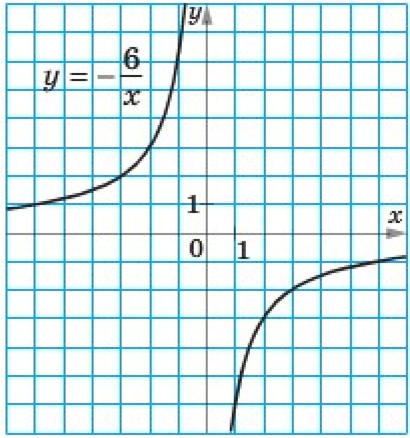



Рис. 6

Если $k > 0$, то ветви гиперболы расположены в I и III четвертях, а если $k < 0$ — то во II и IV четвертях.

На рисунке 6 изображен график функции $y = -\frac{6}{x}$. Ветви гиперболы $y = -\frac{6}{x}$ расположены во II и IV четвертях.

Заметим, что областью значений функции $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, являются все числа, кроме 0.

В таблице приведены свойства функции $y = \frac{k}{x}$, изученные в этом пункте.

| | |
|---|---|
| Область определения | Все числа, кроме 0 |
| Область значений | Все числа, кроме 0 |
| График | Гипербола |
| Нуль функции (значение аргумента, при котором значение функции равно 0) | Не существует |
| Свойство графика | Если точка $A$ $(x_0; y_0)$ принадлежит гиперболе $y = \frac{k}{x}$, то точка $B$ $(-x_0; -y_0)$ также принадлежит этой гиперболе. |

Покажем, как график функции $y=\frac{k}{x}$ можно использовать при решении уравнений.

**ПРИМЕР 3** Решите уравнение $\frac{4}{x}=x+3.$

*Решение.* Рассмотрим функции $y=\frac{4}{x}$ и $y = x + 3$. Построим в одной системе координат графики этих функций (рис. 7). Они пересекаются в двух точках, абсциссы которых равны 1 и −4. В каждой из точек пересечения графиков значение функции $y=\frac{4}{x}$ равно значению функции $y = x + 3$. Следовательно, при найденных абсциссах значения выражений $\frac{4}{x}$ и $x + 3$ равны, то есть числа 1 и −4 являются корнями уравнения $\frac{4}{x}=x+3$. Проверка это подтверждает. Действительно, $\frac{4}{1}=1+3$ и $\frac{4}{-4}=-4+3$. ▲

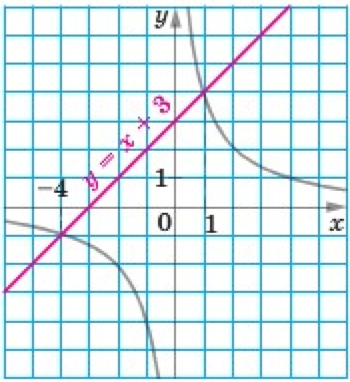


Рис. 7

Описанный метод решения уравнений называют **графическим.** В 7 классе вы ознакомились с графическим методом решения систем уравнений и знаете, что этот метод не всегда дает точные результаты. Поэтому проверка найденных корней является обязательным этапом решения уравнения.

В дальнейшем (п. 22) вы научитесь решать такие уравнения, не используя графический метод.

?

1. Объясните, какую зависимость между величинами называют обратной пропорциональностью.
2. Какую функцию называют обратной пропорциональностью?
3. Что является областью определения функции $y=\frac{k}{x}$, где $k \neq 0$?
4. Как называют фигуру, которая является графиком обратной пропорциональности?

**5.** Как называют части, из которых состоит гипербола?

**6.** Что является областью значений функции $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$?

**7.** В каких координатных четвертях расположен график функции $y = \frac{k}{x}$, если $k > 0$? если $k < 0$?

**8.** Объясните, в чем заключается графический метод решения уравнений.

## УПРАЖНЕНИЯ

**312.°** Автомобиль проезжает некоторое расстояние за 10 ч. За какое время он проедет это же расстояние, если его скорость:
1) увеличится в 2 раза; 2) уменьшится в 1,2 раза?

**313.°** Длина прямоугольника равна 30 см. Какой станет его длина, если при той же самой площади ширину прямоугольника:
1) увеличить в 1,5 раза; 2) уменьшить в 3,2 раза?

**314.°** За некоторую сумму денег купили 40 м ткани. Сколько метров ткани купили бы за ту же сумму денег, если бы цена за 1 м:
1) уменьшилась в 2,6 раза; 2) увеличилась в 1,6 раза?

**315.°** Пешеход прошел 12 км. Заполните таблицу, в первой строке которой указана скорость, а во второй — время движения.

| $v$, км/ч | 5 | | 2,4 | |
|---|---|---|---|---|
| $t$, ч | | 3 | | $3\frac{1}{3}$ |

Задайте формулой зависимость $t$ от $v$.

**316.°** Объем прямоугольного параллелепипеда равен 48 см$^3$. Заполните таблицу, в первой строке которой указана площадь его основания, а во второй — высота.

| $S$, см$^2$ | 16 | | 240 | |
|---|---|---|---|---|
| $h$, см | | 8 | | 4,8 |

Задайте формулой зависимость $h$ от $S$.

**317.°** Бригада из семи рабочих с одинаковой производительностью труда может выполнить некоторое производственное задание за 12 дней. Сколько потребуется рабочих с такой же производительностью труда, чтобы выполнить это задание за 4 дня?

**318.°** Заготовленных кормов хватит для 24 лошадей на 18 дней. На сколько дней хватит этих кормов для 36 лошадей?

**319.°** Среди данных функций укажите обратные пропорциональности:

1) $y = 2x$; 3) $y = \frac{2}{x}$; 5) $y = -\frac{0,8}{x}$; 7) $y = \frac{1}{2x}$;

2) $y = \frac{x}{2}$; 4) $y = -\frac{1}{x}$; 6) $y = \frac{2x}{3}$; 8) $y = \frac{2}{3x}$.

**320.°** Задана функция $y = \frac{24}{x}$. Найдите:

1) значение функции, если значение аргумента равно: −3; 6; 0,2;
2) значение аргумента, при котором значение функции равно: 12; −6; 100.

**321.°** Задана функция $y = -\frac{36}{x}$. Найдите:

1) значение функции, если значение аргумента равно: −4; 0,9; 18;
2) значение аргумента, при котором значение функции равно: 6; −0,3; 8.

**322.°** Постройте график функции $y = -\frac{8}{x}$. Пользуясь графиком, найдите:

1) значение функции, если значение аргумента равно: 4, −1;
2) значение аргумента, при котором значение функции равно: 2, −8;
3) значения аргумента, при которых функция принимает положительные значения.

**323.°** Постройте график функции $y = \frac{10}{x}$. Пользуясь графиком, найдите:

1) значение функции, если значение аргумента равно: 2, −10;
2) значение аргумента, при котором значение функции равно: 5, −2;
3) значения аргумента, при которых функция принимает отрицательные значения.

**324.°** Не выполняя построения графика функции $y = \frac{28}{x}$, определите, проходит ли график через точку:

1) $A$ (−4; −7); 2) $B$ (14; −2); 3) $C$ (0,5; 14); 4) $D$ (0,2; 140).

**325.°** Не выполняя построения графика функции $y = -\frac{48}{x}$, определите, проходит ли график через точку:

1) $A$ (−6; −8); 2) $B$ (12; −4); 3) $C$ (0,3; −16); 4) $D$ (0,4; −120).

**326.**• На рисунке 8 изображен график зависимости времени $t$ движения из пункта $A$ в пункт $B$ от скорости $v$ движения. Пользуясь графиком, определите:

1) за какое время можно добраться из пункта $A$ в пункт $B$, если скорость движения равна 8 км/ч; 24 км/ч;
2) какой должна быть скорость движения, чтобы добраться из пункта $A$ в пункт $B$ за 3 ч; за 4 ч;
3) чему равно расстояние между пунктами $A$ и $B$.

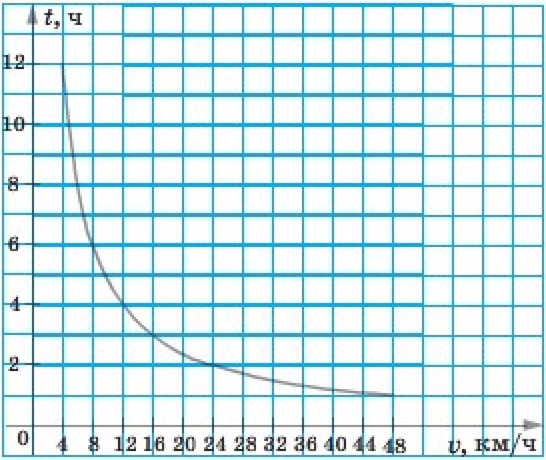



Рис. 8

**327.**• Проволочный реостат подключен к блоку питания (рис. 9). Сопротивление реостата $R$ зависит от положения ползунка и может изменяться в пределах от 0 до 6 Ом. Пользуясь графиком зависимости силы тока $I$ от сопротивления $R$ при условии, что напряжение на концах реостата остается неизменным (рис. 10), определите:

1) чему равна сила тока, если сопротивление равно 2 Ом;
2) при каком значении сопротивления сила тока равна 3 А;
3) сколько вольт составляет напряжение на концах реостата.

**328.**• Найдите значение $k$, при котором график функции $y = \frac{k}{x}$ проходит через точку:

1) $A\ (-5;\ 4)$; 2) $B\left(\frac{1}{6}; -2\right)$; 3) $C\ (1,5;\ -8)$.

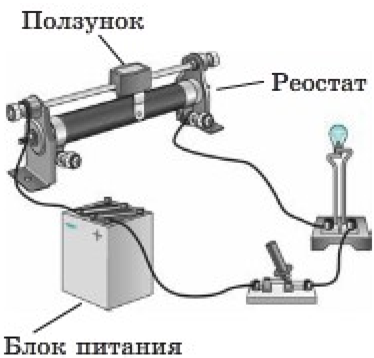



Рис. 9

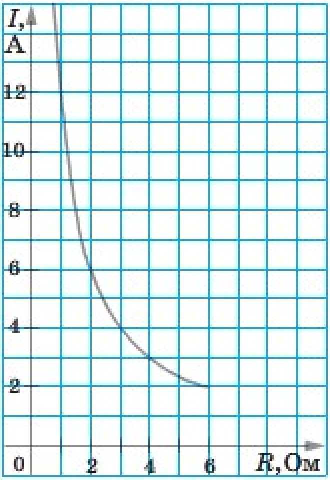



Рис. 10

**329.** График функции $y=\frac{k}{x}$ проходит через точку $A$ (10; 1,6). Проходит ли график этой функции через точку:
1) $B$ (−1; −16); 2) $C$ (−2; 8)?

**330.** Постройте в одной системе координат графики функций $y=\frac{4}{x}$ и $y = x$ и определите координаты точек их пересечения.

**331.** Решите графически уравнение:

1) $\frac{4}{x}=4-x$; 2) $x-2=\frac{3}{x}$; 3) $x+2=-\frac{5}{x}$.

**332.** Решите графически уравнение:

1) $\frac{8}{x}=6-x$; 2) $2x=\frac{2}{x}$; 3) $\frac{7}{x}=-x$.

**333.** Решите графически систему уравнений:

1) $\begin{cases} xy=4, \\ 4y=x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y=1, \\ xy=2. \end{cases}$

**334.** Решите графически систему уравнений $\begin{cases} xy=5, \\ y-x=4. \end{cases}$

**335.** Определите графически количество решений системы уравнений:

1) $\begin{cases} xy=-1, \\ x+3y=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy=-1, \\ x-3y=0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} xy=6, \\ 3x-2y=6. \end{cases}$

**336.*** Определите графически количество решений системы уравнений $\begin{cases} xy = -8, \\ 2x + 3y = 6. \end{cases}$

**337.**** Найдите координаты всех точек графика функции $y = \frac{64}{x}$, у которых абсцисса и ордината равны.

**338.**** Найдите координаты всех точек графика функции $y = -\frac{25}{x}$, у которых абсцисса и ордината — противоположные числа.

**339.**** Постройте график функции $y = \frac{6}{|x|}$.

**340.**** Постройте график функции:

1) $y = \begin{cases} -\frac{2}{x}, & \text{если } x \leqslant -1, \\ x + 3, & \text{если } x > -1; \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} -2x + 10, & \text{если } x \leqslant 2, \\ \frac{12}{x}, & \text{если } 2 < x < 4, \\ 3, & \text{если } x \geqslant 4. \end{cases}$

**341.**** Постройте график функции:

$$y = \begin{cases} -\frac{4}{x}, & \text{если } x < -2, \\ 2, & \text{если } -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ \frac{4}{x}, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

**342.**** Постройте график функции:

1) $y = \frac{9x - 18}{x^2 - 2x}$;

2) $y = \frac{5x^2 - 5}{x - x^3}$.

**343.**** Постройте график функции $y = \frac{10x^2 - 40}{x^3 - 4x}$.

## УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

**344.** Докажите, что при всех допустимых значениях переменных, содержащихся в выражении

$$\frac{a^2 - b^2}{a + 3b} \cdot \left( \frac{a + b}{a^2 - 2ab + b^2} + \frac{b}{a^2 - b^2} \right) - \frac{b}{a - b},$$

его значение не зависит от значений переменных.

**345.** Решите уравнение

$$\frac{3}{5x+25} + \frac{1}{2x-10} = \frac{5}{x^2-25}.$$

**346.** Цену шкафа снизили на 30 %, а спустя некоторое время повысили на 30 %. Как изменилась — увеличилась или уменьшилась — цена шкафа по сравнению с первоначальной и на сколько процентов?

**347.** (*Задача Сунь-Цзы*[1].) Двое мужчин получили монеты, которые они должны разделить между собой так, что если бы к монетам, которые получит первый из них, прибавить половину монет второго или к монетам, которые получит второй, прибавить $\frac{2}{3}$ монет первого, то в обоих случаях получилось бы 48 монет. Сколько монет должен получить каждый из мужчин?

**348.** Если лыжник будет двигаться со скоростью 10 км/ч, то доберется в пункт назначения на 1 ч позже запланированного времени прибытия, а если будет двигаться со скоростью 15 км/ч — то на 1 ч раньше. С какой скоростью он должен двигаться, чтобы прибыть в пункт назначения в запланированное время?

## УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

**349.** Каждый из трех учеников написал по 100 разных слов. После этого одинаковые слова вычеркнули. В результате у первого ученика осталось 45 слов, у второго — 68, а у третьего — 78. Докажите, что по крайней мере одно слово записали все трое.

---

[1] Сунь-Цзы — китайский математик, живший в III или IV в. н. э.

## ЗАДАНИЕ № 3 «ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ» В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ

**1.** Решите уравнение $\frac{x^2-100}{x-10}=0.$

А) $-10;\ 10;$ Б) $10;$ В) $-10;$ Г) корней нет.

**2.** Решите уравнение $\frac{x-10}{x^2-100}=0.$

А) $-10;\ 10;$ Б) $10;$ В) $-10;$ Г) корней нет.

**3.** Какое из данных равенств верно?

А) $10^{-3}=-1000;$ В) $(-2)^{-3}=-\frac{1}{8};$

Б) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^{-2}=-\frac{9}{16};$ Г) $\frac{1}{7^{-2}}=-49.$

**4.** Как записывают в стандартном виде число 42 000?

А) $4{,}2\cdot10^3;$ В) $0{,}42\cdot10^5;$

Б) $4{,}2\cdot10^4;$ Г) $42\cdot10^3.$

**5.** Как записывают в виде десятичной дроби число $6{,}3\cdot10^{-3}$?

А) 0,63; В) 0,0063;

Б) 0,063; Г) 0,00063.

**6.** Представьте число $\frac{1}{25}$ в виде степени с основанием 5.

А) $5^{-2};$ Б) $5^2;$ В) $5^{-3};$ Г) $5^3.$

**7.** Чему равно значение выражения $(1{,}7\cdot10^8)\cdot(6\cdot10^{-3})$?

А) $1{,}02\cdot10^5;$ В) $10{,}2\cdot10^5;$

Б) $1{,}02\cdot10^6;$ Г) $1{,}02\cdot10^7.$

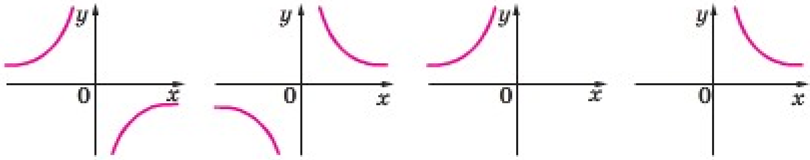
**8.** Найдите значение выражения $\frac{9^{-2}\cdot3^{-5}}{81\cdot27^{-3}}.$

А) 81; Б) $\frac{1}{81};$ В) 27; Г) $\frac{1}{27}.$

**9.** Какая из данных функций не является обратной пропорциональностью?

А) $y=\frac{3}{x};$ Б) $y=-\frac{3}{x};$ В) $y=\frac{3}{2x};$ Г) $y=\frac{3x}{2}.$

**10.** На одном из рисунков изображен график функции $y = -\dfrac{4}{x}$. Укажите этот рисунок.




А) Б) В) Г)

**11.** При каком значении $k$ график функции $y = \dfrac{k}{x}$ проходит через точку $A\,(-3;\ 0{,}6)$?

А) $-1{,}8$; Б) $-0{,}2$; В) $-2{,}4$; Г) $-3{,}6$.

**12.** Решите уравнение $\dfrac{2x-1}{x+4} - \dfrac{3x+1}{4-x} = \dfrac{4x^2+8}{x^2-16}$.

А) 0; 4; Б) −4; 0; В) −4; Г) 0.

## ГЛАВНОЕ В ПАРАГРАФЕ 1

**Рациональное выражение**

Целые и дробные выражения называют рациональными выражениями.

**Допустимые значения переменных**

Допустимыми значениями переменных, входящих в рациональное выражение, называют все значения переменных, при которых это выражение имеет смысл.

**Тождественно равные выражения**

Выражения, соответствующие значения которых равны при любых допустимых значениях входящих в них переменных, называют тождественно равными.

**Тождество**

Равенство, которое выполняется при любых допустимых значениях входящих в него переменных, называют тождеством.

**Основное свойство рациональной дроби**

Если числитель и знаменатель рациональной дроби умножить на один и тот же ненулевой многочлен, то получим дробь, тождественно равную данной.

**Сложение и вычитание рациональных дробей с одинаковыми знаменателями**

Чтобы сложить рациональные дроби с одинаковыми знаменателями, нужно сложить их числители, а знаменатель оставить тот же.

Чтобы вычесть рациональные дроби с одинаковыми знаменателями, нужно из числителя первой дроби вычесть числитель второй дроби, а знаменатель оставить тот же.

**Умножение рациональных дробей**

Произведением двух рациональных дробей является рациональная дробь, числитель которой равен произведению числителей данных дробей, а знаменатель — произведению их знаменателей.

**Деление рациональных дробей**

Частным двух рациональных дробей является рациональная дробь, числитель которой равен произведению числителя делимого и знаменателя делителя, а знаменатель — произведению знаменателя делимого и числителя делителя.

**Возведение рациональной дроби в степень**

Чтобы возвести рациональную дробь в степень, нужно возвести в эту степень числитель и знаменатель. Первый результат записать как числитель, а второй — как знаменатель дроби.

**Равносильные уравнения**

Два уравнения называют равносильными, если они имеют одни и те же корни или каждое из уравнений не имеет корней.

**Свойства уравнений**

Если к обеим частям данного уравнения прибавить (или из обеих частей вычесть) одно и то же число, то получим уравнение, равносильное данному.
Если какое-либо слагаемое перенести из одной части уравнения в другую, изменив при этом его знак на противоположный, то получим уравнение, равносильное данному.
Если обе части уравнения умножить (разделить) на одно и то же отличное от нуля число, то получим уравнение, равносильное данному.

**Рациональное уравнение**

Уравнение, левая и правая части которого являются рациональными выражениями, называют рациональным.

**Степень с целым отрицательным показателем**

Для любого числа $a$, не равного нулю, и натурального числа $n$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

**Степень с показателем, равным нулю**

Для любого числа $a$, не равного нулю, $a^0 = 1$.

**Стандартный вид числа**

Стандартным видом числа называют его запись в виде произведения $a \cdot 10^n$, где $1 \leqslant a < 10$ и $n$ — целое число.

**Свойства степени с целым показателем**

Для любых $a \neq 0$ и $b \neq 0$ и любых целых $m$ и $n$ выполняются равенства:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (основное свойство степени);

$(a^m)^n = a^{mn}$;

$(ab)^n = a^n b^n$;

$a^m : a^n = a^{m-n}$;

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

**Функция обратная пропорциональность**

Функцию, которую можно задать формулой вида $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, называют обратной пропорциональностью.

**Свойства функции $y = \frac{k}{x}$**

Область определения: все числа, кроме 0.
Область значений: все числа, кроме 0.
График: гипербола.
Нуль функции: не существует.
Свойство графика: если точка $A$ $(x_0; y_0)$ принадлежит гиперболе $y = \frac{k}{x}$, то точка $B$ $(-x_0; -y_0)$ также принадлежит этой гиперболе.

# § 2 КВАДРАТНЫЕ КОРНИ. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

- Изучая материал этого параграфа, вы ознакомитесь с функцией $y = x^2$ и ее свойствами.
- Узнаете о новом действии «извлечение квадратного корня». Вы убедитесь, что для изучения окружающего мира только рациональных чисел недостаточно.
- Вы ознакомитесь с новым математическим понятием — арифметическим квадратным корнем, узнаете о его свойствах. Научитесь упрощать выражения, содержащие квадратные корни.

## 11. Функция $y = x^2$ и ее график

Обозначим через $y$ площадь квадрата со стороной $x$. Тогда $y = x^2$.

С изменением стороны $x$ квадрата соответственно будет изменяться и его площадь $y$.

Понятно, что каждому значению переменной $x$ соответствует единственное значение переменной $y$. Следовательно, зависимость переменной $y$ от переменной $x$ является функциональной, а формула $y = x^2$ задает функцию.

Рассмотрим функцию $y = x^2$, областью определения которой являются все числа. В таблице приведены некоторые значения аргумента и соответствующие им значения функции.

| $x$ | −3 | −2,5 | −2 | −1,5 | −1 | −0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 9 | 6,25 | 4 | 2,25 | 1 | 0,25 | 0 | 0,25 | 1 | 2,25 | 4 | 6,25 | 9 |

Отметим на координатной плоскости точки, координаты которых $(x;\ y)$ возьмем из таблицы (рис. 11).

Чем больше точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $y = x^2$, будет отмечено, тем меньше полученная фигура (рис. 12) будет отличаться от графика функции $y = x^2$.

Пара чисел (0; 0) является решением уравнения $y = x^2$. Следовательно, график данной функции проходит через начало координат. Поскольку $y = x^2$ и $x^2 \geqslant 0$, то $y \geqslant 0$, то есть среди отмеченных точек не может быть точек с отрицательными ординатами.

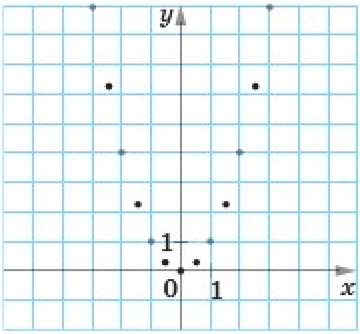



Рис. 11

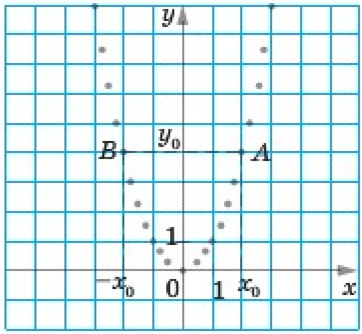



Рис. 12

Область значений функции $y = x^2$ — все неотрицательные числа.

Если бы удалось отметить на координатной плоскости все точки, координаты которых удовлетворяют уравнению $y = x^2$, то получилась бы фигура — график функции $y = x^2$, которую называют **параболой** (рис. 13).

Точка с координатами (0; 0) делит параболу на две равные части, каждую из которых называют **ветвью параболы**, а саму точку — **вершиной параболы.**

Заметим, что если верно равенство $y_0 = x_0^2$, то верно и равенство $y_0 = (-x_0)^2$. Тогда можно сделать такой вывод: если точка $A\ (x_0;\ y_0)$ принадлежит параболе $y = x^2$, то точка $B\ (-x_0;\ y_0)$ также принадлежит этой параболе.

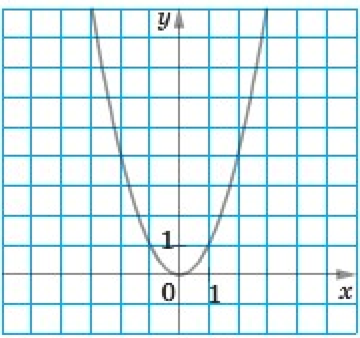



Рис. 13

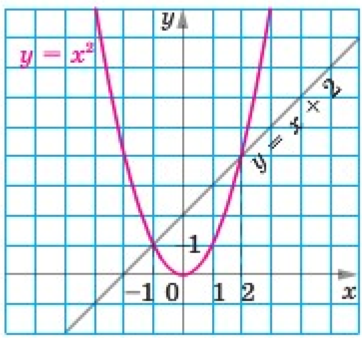



Рис. 14

В таблице приведены свойства функции $y = x^2$, изученные в этом пункте.

| | |
|---|---|
| Область определения | Все числа |
| Область значений | Все неотрицательные числа |
| График | Парабола |
| Нуль функции (значение аргумента, при котором значение функции равно 0) | $x = 0$ |
| Свойство графика | Если точка $A(x_0;\ y_0)$ принадлежит параболе $y = x^2$, то точка $B(-x_0;\ y_0)$ также принадлежит этой параболе. |

**ПРИМЕР** Решите графически уравнение $x^2 = x + 2$.

*Решение.* В одной системе координат построим графики функций $y = x^2$ и $y = x + 2$ (рис. 14). Эти графики пересекаются в двух точках, абсциссы которых равны 2 и $-1$. Следовательно, как при $x = 2$, так и при $x = -1$ значения выражений $x^2$ и $x + 2$ равны, то есть числа 2 и $-1$ являются корнями уравнения $x^2 = x + 2$. Проверка это подтверждает. Действительно, $2^2 = 2 + 2$ и $(-1)^2 = -1 + 2$. ▲

?

1. Что является областью определения функции $y = x^2$?
2. Что является областью значений функции $y = x^2$?
3. При каком значении аргумента значение функции $y = x^2$ равно нулю?
4. Сравните значения функции $y = x^2$ при противоположных значениях аргумента.
5. Какая фигура является графиком функции $y = x^2$?

## УПРАЖНЕНИЯ

**350.°** Функция задана формулой $y = x^2$. Найдите:

1) значение функции, если значение аргумента равно: $-6$; 0,8; $-1,2$; 150;
2) значение аргумента, при котором значение функции равно: 49; 0; 2500; 0,04.

**351.°** Не выполняя построения графика функции $y = x^2$, определите, проходит ли этот график через точку:

1) $A(-8;\ 64)$; 2) $B(-9;\ -81)$; 3) $C(0,5;\ 2,5)$; 4) $D(0,1;\ 0,01)$.

**352.**° Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения графиков функций $y = x^2$ и $y = 4x - 4$. Постройте графики данных функций и отметьте найденные точки.

**353.**° Решите графически уравнение:

1) $x^2 = x - 1$; 2) $x^2 - 2x - 3 = 0$; 3) $x^2 = \frac{8}{x}$.

**354.**° Решите графически уравнение:

1) $x^2 = -4x - 3$; 2) $x^2 - 3x + 5 = 0$; 3) $x^2 + \frac{1}{x} = 0$.

**355.**° Установите графически количество решений системы уравнений:

1) $\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x^2, \\ y = -2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y - x^2 = 0, \\ x - y + 6 = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y - x^2 = 0, \\ 2x + 5y = 10. \end{cases}$

**356.**° Установите графически количество решений системы уравнений:

1) $\begin{cases} y = x^2, \\ 3x + 2y = -6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x^2, \\ x - 3y = -3. \end{cases}$

**357.**•• Функция $f$ задана следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 4, & \text{если } x \leqslant -2, \\ x^2, & \text{если } -2 < x < 1, \\ 2x - 1, & \text{если } x \geqslant 1. \end{cases}$$

1) Найдите $f(-3)$, $f(-2)$, $f(-1)$, $f(1)$, $f(3)$, $f(0,5)$.

2) Постройте график данной функции.

**358.**•• Дана функция $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & \text{если } x \leqslant -1, \\ x^2, & \text{если } -1 < x < 2, \\ 4, & \text{если } x \geqslant 2. \end{cases}$

1) Найдите $f(-4)$, $f(-0,3)$, $f(1,9)$, $f(3)$, $f(-1)$, $f(2)$.

2) Постройте график данной функции.

**359.**•• Дана функция $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \leqslant 0, \\ x + 1, & \text{если } x > 0. \end{cases}$

1) Найдите $f(-7)$, $f(0)$, $f(2)$.

2) Постройте график данной функции.

**360.**•• Дана функция $f(x) = \begin{cases} -\frac{6}{x}, & \text{если } x \leqslant -1, \\ x^2, & \text{если } x > -1. \end{cases}$

1) Найдите $f(-12)$, $f(-1)$, $f(-0,9)$, $f(3)$, $f(0)$.

2) Постройте график данной функции.

**361.**** Постройте график функции:

1) $y=\dfrac{x^3+x^2}{x+1}$; 2) $y=\dfrac{x^4-4x^2}{x^2-4}$.

**362.**** Постройте график функции $y=\dfrac{x^3}{x}$.

**363.**** Найдите область определения, область значений и нули функции $y=-x^2$. Постройте график этой функции.

**364.*** Постройте график уравнения:

1) $\dfrac{y-x^2}{(x-1)^2+(y-1)^2}=0$; 2) $\dfrac{y-x^2}{y-x}=0$.

**365.*** Постройте график уравнения $\dfrac{x^2-y}{(x+2)^2+(y-4)^2}=0$.

**366.*** Задайте с помощью формул функцию, график которой изображен на рисунке 15.

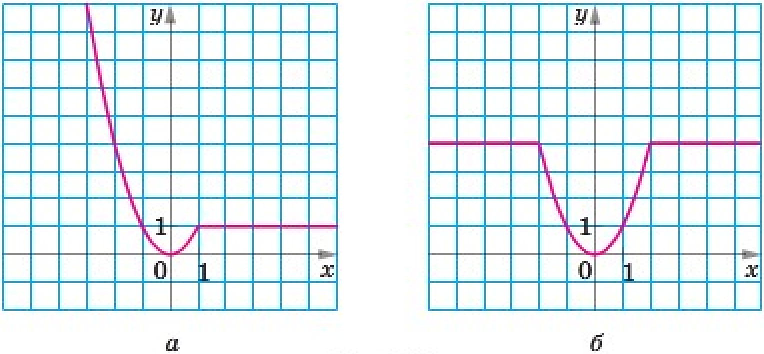



Рис. 15

**367.*** Задайте с помощью формул функцию, график которой изображен на рисунке 16.

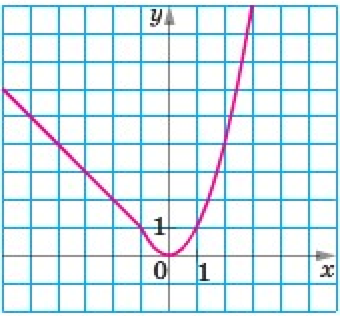



Рис. 16

## УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

**368.** Докажите тождество $\frac{(a+b)^2}{a-b}:\left(\frac{a}{a-b}+\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\frac{a}{a+b}\right)=a+b.$

**369.** Решите уравнение $\frac{6}{x-2}-\frac{x+3}{x}=\frac{x+6}{x^2-2x}$.

**370.** Докажите, что значение выражения $27^6 - 9^7$ кратно 48.

**371.** Из двух пунктов, расстояние между которыми равно 30 км, одновременно навстречу друг другу вышли два пешехода и встретились через 3 ч 45 мин. Если бы первый из них вышел на 2 ч раньше второго, то они встретились бы через 4,5 ч после выхода первого. Найдите скорость каждого пешехода.

## ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

**372.** Найдите сторону квадрата, площадь которого равна: 1) 25 см$^2$; 2) 1600 дм$^2$; 3) 0,04 м$^2$.

**373.** Решите уравнение:

1) $x^2 = 9$; 2) $x^2 = \frac{36}{49}$.

**374.** При каких значениях $a$ уравнение $x^2 = a$ не имеет корней?

**375.** Постройте графики функций $y = x^2$ и $y = 1$ и найдите координаты их общих точек.

## УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

**376.** Натуральные числа $x$, $y$, $z$ таковы, что значения выражений $x + y$, $y + z$, $x + z$ — простые числа. Докажите, что среди чисел $x$, $y$, $z$ есть по крайней мере два числа, равные 1.

# 12. Квадратные корни. Арифметический квадратный корень

Рассмотрим квадрат, площадь которого равна 49 квадратным единицам. Пусть длина его стороны составляет $x$ единиц. Тогда уравнение $x^2 = 49$ можно рассматривать как математическую модель задачи о нахождении стороны квадрата, площадь которого равна 49 квадратным единицам.

Корнями этого уравнения являются числа 7 и −7. Говорят, что числа 7 и −7 являются **квадратными корнями** из числа 49.

**Определение. Квадратным корнем из числа $a$ называют число, квадрат которого равен $a$.**

Приведем несколько примеров.

Квадратными корнями из числа 9 являются числа 3 и −3. Действительно, $3^2 = 9$, $(-3)^2 = 9$.

Квадратными корнями из числа $\frac{25}{4}$ являются числа $\frac{5}{2}$ и $-\frac{5}{2}$. Действительно, $\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$, $\left(-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$.

Квадратным корнем из числа 0 является только число 0. Действительно, существует лишь одно число, квадрат которого равен нулю, — это число 0.

Поскольку не существует числа, квадрат которого равен отрицательному числу, то квадратного корня из отрицательного числа не существует.

*Положительный корень* уравнения $x^2 = 49$, число 7, является ответом в задаче о нахождении стороны квадрата, площадь которого равна 49 квадратным единицам. Это число называют **арифметическим квадратным корнем** из числа 49.

**Определение. Арифметическим квадратным корнем из числа $a$ называют неотрицательное число, квадрат которого равен $a$.**

Арифметический квадратный корень из числа $a$ обозначают $\sqrt{a}$. Знак $\sqrt{\phantom{a}}$ называют **знаком квадратного корня** или **радикалом** (от лат. *radix* — корень).

Запись $\sqrt{a}$ читают: «квадратный корень из $a$», опуская при чтении слово «арифметический».

Выражение, стоящее под радикалом, называют **подкоренным выражением**. Например, в записи $\sqrt{b-5}$ двучлен $b-5$ является подкоренным выражением. Из определения арифметического квадратного корня следует, что ***подкоренное выражение может принимать только неотрицательные значения***.

Действие нахождения арифметического квадратного корня из числа называют **извлечением квадратного корня**.

Рассмотрим несколько примеров:

$\sqrt{9} = 3$, так как $3 \geqslant 0$ и $3^2 = 9$;

$\sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$, так как $\frac{5}{2} \geqslant 0$ и $\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$;

$\sqrt{0} = 0$, так как $0 \geqslant 0$ и $0^2 = 0$.

Вообще, ***равенство*** $\sqrt{a} = b$ ***выполняется при условии, что*** $b \geqslant 0$ ***и*** $b^2 = a$.

Этот вывод можно представить в другой форме: ***для любого неотрицательного числа а справедливо, что*** $\sqrt{a} \geqslant 0$ ***и*** $(\sqrt{a})^2 = a$.

Например, $\sqrt{4} \geqslant 0$ и $(\sqrt{4})^2 = 4$, $\sqrt{2} \geqslant 0$ и $(\sqrt{2})^2 = 2$, $\sqrt{5,2} \geqslant 0$ и $(\sqrt{5,2})^2 = 5,2$.

Подчеркнем, что к понятию квадратного корня мы пришли, решая уравнение вида $x^2 = a$, где $a \geqslant 0$. Корни этого уравнения — числа, каждое из которых является квадратным корнем из числа $a$.

Поиск корней уравнения $x^2 = a$ проиллюстрируем, решив графически уравнение $x^2 = 4$.

В одной системе координат построим графики функций $y = x^2$ и $y = 4$ (рис. 17). Точки пересечения этих графиков имеют абсциссы 2 и −2, которые и являются корнями данного уравнения.

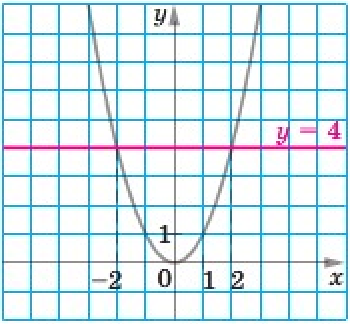



Рис. 17

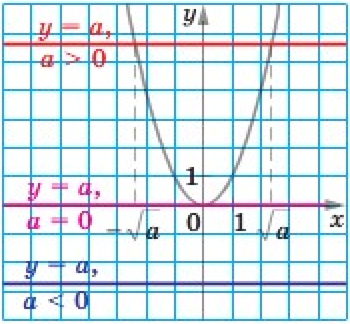



Рис. 18

Уравнение $x^2 = a$ при $a < 0$ не имеет корней, что подтверждается графически: графики функций $y = x^2$ и $y = a$ при $a < 0$ общих точек не имеют (рис. 18).

При $a = 0$ уравнение $x^2 = a$ имеет единственный корень $x = 0$, что также подтверждается графически: графики функций $y = x^2$ и $y = 0$ имеют только одну общую точку (рис. 18).

Графический метод также позволяет сделать следующий вывод: если $a > 0$, то уравнение $x^2 = a$ имеет два корня. Действительно, парабола $y = x^2$ и прямая $y = a$, где $a > 0$, имеют две общие точки (рис. 18). При этом корнями уравнения $x^2 = a$ являются числа $\sqrt{a}$ и $-\sqrt{a}$. Действительно, $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, $\left(-\sqrt{a}\right)^2 = a$.

Например, уравнение $x^2 = 5$ имеет два корня: $\sqrt{5}$ и $-\sqrt{5}$.

**ПРИМЕР 1** Найдите значение выражения $\left(-8\sqrt{2}\right)^2$.

*Решение.* Применив правило возведения произведения в степень и тождество $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, получим:

$$\left(-8\sqrt{2}\right)^2 = (-8)^2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 = 64 \cdot 2 = 128. \blacktriangle$$

**ПРИМЕР 2** Решите уравнение: 1) $\frac{1}{2}\sqrt{x} - 3 = 0$; 2) $\sqrt{1+\sqrt{x+2}} = 2$.

*Решение.* 1) Имеем: $\frac{1}{2}\sqrt{x} = 3$; $\sqrt{x} = 6$. Тогда $x = 6^2$; $x = 36$.

*Ответ*: 36.

2) $\sqrt{1+\sqrt{x+2}} = 2$; $1+\sqrt{x+2} = 2^2$; $\sqrt{x+2} = 3$; $x + 2 = 3^2$; $x = 7$.

*Ответ*: 7. $\blacktriangle$

**ПРИМЕР 3** Решите уравнение $(x - 5)^2 = 16$.

*Решение.* $(x - 5)^2 = 16$;

$$x - 5 = -4 \text{ или } x - 5 = 4;$$
$$x = 1 \text{ или } x = 9.$$

*Ответ*: 1; 9. $\blacktriangle$

**ПРИМЕР 4** Решите уравнение $(3x - 1)^2 = 2$.

*Решение.* $(3x - 1)^2 = 2$;

$$3x - 1 = -\sqrt{2} \text{ или } 3x - 1 = \sqrt{2};$$
$$3x = 1 - \sqrt{2} \text{ или } 3x = 1 + \sqrt{2};$$
$$x = \frac{1-\sqrt{2}}{3} \text{ или } x = \frac{1+\sqrt{2}}{3}.$$

*Ответ*: $\frac{1-\sqrt{2}}{3}$; $\frac{1+\sqrt{2}}{3}$. $\blacktriangle$

**ПРИМЕР 5** При каких значениях $x$ имеет смысл выражение: 1) $\sqrt{-5x}$; 2) $\frac{3}{\sqrt{x}-2}$?

*Решение.* 1) Выражение $\sqrt{-5x}$ имеет смысл, если подкоренное выражение $-5x$ принимает неотрицательные значения. Подкоренное выражение является произведением двух множителей, один из которых — отрицательное число. Следовательно, это произведение будет принимать неотрицательные значения, если другой множитель $x$ будет принимать неположительные значения.

*Ответ*: при $x \leqslant 0$.

2) Данное выражение имеет смысл, если выполняются два условия: имеет смысл выражение $\sqrt{x}$ и знаменатель $\sqrt{x}-2$ отличен от нуля. Следовательно, должны одновременно выполняться два условия: $x \geqslant 0$ и $\sqrt{x}-2 \neq 0$. Отсюда $x \geqslant 0$ и $x \neq 4$.

*Ответ*: при $x \geqslant 0$ и $x \neq 4$. ▲

**ПРИМЕР 6** Решите уравнение: 1) $\sqrt{-x}+\sqrt{x-2}=2$;

2) $\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{x-2}=0$; 3) $(x+2)\sqrt{x-2}=0$.

*Решение.* 1) Левая часть данного уравнения имеет смысл, если подкоренные выражения $-x$ и $x-2$ одновременно принимают неотрицательные значения. Из того, что первое подкоренное выражение должно быть неотрицательным, получаем: $-x \geqslant 0$, тогда $x \leqslant 0$. Однако если $x \leqslant 0$, то второе подкоренное выражение, $x-2$, принимает только отрицательные значения. Следовательно, левая часть данного уравнения не имеет смысла.

*Ответ*: корней нет.

2) Левая часть данного уравнения является суммой двух слагаемых, каждое из которых может принимать только неотрицательные значения. Тогда их сумма будет равна нулю, если каждое из слагаемых равно нулю. Следовательно, одновременно должны выполняться два условия: $\sqrt{x^2-2x}=0$ и $\sqrt{x-2}=0$. Это означает, что надо найти общие корни полученных уравнений, то есть решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{x^2-2x}=0,\\ \sqrt{x-2}=0.\end{cases}$$

Имеем: $\begin{cases}x^2-2x=0,\\ x-2=0;\end{cases}$ $\begin{cases}x(x-2)=0,\\ x=2;\end{cases}$ $\begin{cases}x=0 \text{ или } x=2,\\ x=2.\end{cases}$

Решением последней системы, а значит, и исходного уравнения, является число 2.

*Ответ*: 2.

3) Используя условие равенства произведения нулю, получаем:

$$x+2=0 \text{ или } \sqrt{x-2}=0;$$
$$x=-2 \text{ или } x=2.$$

Однако при $x=-2$ выражение $\sqrt{x-2}$ не имеет смысла. Следовательно, данное уравнение имеет единственный корень — число 2.

*Ответ*: 2. ▲

1. Что называют квадратным корнем из числа $a$?
2. Что называют арифметическим квадратным корнем из числа $a$?
3. Как обозначают арифметический квадратный корень из числа $a$?
4. Как называют знак $\sqrt{\phantom{a}}$ ?
5. Как читают запись $\sqrt{a}$ ?
6. Как называют выражение, стоящее под радикалом?
7. Какие значения может принимать подкоренное выражение?
8. Как называют действие нахождения арифметического квадратного корня из числа?
9. Чему равно значение выражения $\left(\sqrt{a}\right)^2$ для любого неотрицательного числа $a$?
10. Сколько корней имеет уравнение $x^2 = a$ при $a > 0$? Чему они равны?
11. Имеет ли корни уравнение $x^2 = a$ при $a = 0$? при $a < 0$?

## УПРАЖНЕНИЯ

**377.°** Чему равен квадратный корень из числа 16? из числа 1? из числа 0? Чему равен арифметический квадратный корень из этих чисел?

**378.°** Верно ли равенство (ответ обоснуйте):

1) $\sqrt{25} = 5$;
2) $\sqrt{0} = 0$;
3) $\sqrt{36} = -6$;
4) $\sqrt{0{,}4} = 0{,}2$;
5) $\sqrt{0{,}81} = 0{,}9$;
6) $\sqrt{10} = 100$?

**379.°** Найдите значение арифметического квадратного корня:

1) $\sqrt{9}$;
2) $\sqrt{49}$;
3) $\sqrt{100}$;
4) $\sqrt{225}$;
5) $\sqrt{0{,}25}$;
6) $\sqrt{0{,}01}$;
7) $\sqrt{1{,}21}$;
8) $\sqrt{1{,}96}$;
9) $\sqrt{400}$;
10) $\sqrt{3600}$;
11) $\sqrt{\frac{1}{64}}$;
12) $\sqrt{\frac{4}{9}}$;
13) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$;
14) $\sqrt{3\frac{6}{25}}$;
15) $\sqrt{0{,}0004}$;
16) $\sqrt{0{,}000025}$.

**380.°** Найдите значение арифметического квадратного корня:

1) $\sqrt{36}$;
2) $\sqrt{64}$;
3) $\sqrt{144}$;
4) $\sqrt{0{,}04}$;
5) $\sqrt{0{,}49}$;
6) $\sqrt{1{,}69}$;
7) $\sqrt{2500}$;
8) $\sqrt{10\,000}$;
9) $\sqrt{\frac{16}{121}}$;
10) $\sqrt{5\frac{4}{9}}$;
11) $\sqrt{0{,}0009}$;
12) $\sqrt{0{,}0196}$.

**381.°** Имеет ли смысл выражение:

1) $\sqrt{2}$; 2) $-\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{-2}$; 4) $\sqrt{(-2)^2}$; 5) $\left(\sqrt{-2}\right)^2$?

**382.°** Найдите число, арифметический квадратный корень из которого равен:

1) 4; 2) 0; 3) 0,8; 4) $2\frac{1}{4}$; 5) 1,6; 6) −9.

**383.°** Пользуясь таблицей квадратов натуральных чисел, приведенной на форзаце, найдите:

1) $\sqrt{484}$; 4) $\sqrt{5929}$; 7) $\sqrt{68{,}89}$;

2) $\sqrt{729}$; 5) $\sqrt{5{,}76}$; 8) $\sqrt{67\,600}$;

3) $\sqrt{1156}$; 6) $\sqrt{14{,}44}$; 9) $\sqrt{384\,400}$.

**384.°** Найдите:

1) $\sqrt{841}$; 3) $\sqrt{9{,}61}$; 5) $\sqrt{72{,}25}$;

2) $\sqrt{1296}$; 4) $\sqrt{10{,}24}$; 6) $\sqrt{672\,400}$.

**385.°** Пользуясь микрокалькулятором, найдите значение квадратного корня (результат округлите до сотых):

1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{7}$; 3) $\sqrt{34}$; 4) $\sqrt{1{,}8}$; 5) $\sqrt{2{,}439}$.

**386.°** Пользуясь микрокалькулятором, найдите значение квадратного корня (результат округлите до сотых):

1) $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{5{,}1}$; 3) $\sqrt{40}$; 4) $\sqrt{12{,}56}$.

**387.°** Найдите значение выражения:

1) $\left(\sqrt{7}\right)^2$; 4) $-\left(\sqrt{10}\right)^2$; 7) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$;

2) $\left(\sqrt{4{,}2}\right)^2$; 5) $\left(2\sqrt{3}\right)^2$; 8) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{14}\right)^2$;

3) $\left(-\sqrt{11}\right)^2$; 6) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$; 9) $\left(-0{,}3\sqrt{2}\right)^2$.

**388.°** Вычислите:

1) $\left(\sqrt{6}\right)^2$; 3) $\left(3\sqrt{2}\right)^2$; 5) $\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2$;

2) $\left(-\sqrt{21}\right)^2$; 4) $\left(-4\sqrt{5}\right)^2$; 6) $\left(\frac{1}{4}\sqrt{26}\right)^2$.

**389.°** Найдите значение выражения:

1) $\sqrt{16+9}$; 3) $\sqrt{36}-\sqrt{49}$;

2) $\sqrt{16}+\sqrt{9}$; 4) $\sqrt{36}\cdot\sqrt{49}$;

5) $5\sqrt{4}-\sqrt{25}$;

6) $\sqrt{0{,}81}+\sqrt{0{,}01}$;

7) $\frac{1}{3}\sqrt{0{,}09}-2$;

8) $-2\sqrt{0{,}16}+0{,}7$;

9) $\left(\sqrt{13}\right)^2-3\cdot\left(\sqrt{8}\right)^2$;

10) $\frac{1}{6}\cdot\left(\sqrt{18}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\sqrt{24}\right)^2$;

11) $50\cdot\left(-\frac{1}{5}\sqrt{2}\right)^2$;

12) $\sqrt{4\cdot 5^2-6^2}$.

**390.°** Вычислите значение выражения:

1) $\sqrt{3+\sqrt{36}}$;

2) $\sqrt{72-\sqrt{64}}$;

3) $\sqrt{16}\cdot\sqrt{225}$;

4) $\frac{1}{3}\sqrt{900}+0{,}2\sqrt{1600}$;

5) $\left(2\sqrt{6}\right)^2-3\left(\sqrt{21}\right)^2$;

6) $\sqrt{10^2-4\cdot 3^2}$.

**391.°** Найдите значение выражения:

1) $\sqrt{12+a}$, если $a=0{,}25$;

2) $\sqrt{7-3b}$, если $b=2$;

3) $\sqrt{2a-b}$, если $a=34$, $b=19$;

4) $\frac{b^3-a^3b-b^2c+ca^3}{(b-c)^2}+\sqrt{d}$, если $a=-\frac{1}{2}$, $b=-0{,}19$, $c=0{,}18$, $d=0{,}04$.

**392.°** Найдите значение выражения:

1) $\sqrt{27+m}$, если $m=54$;

2) $\sqrt{m-3n}$, если $m=0{,}13$, $n=-0{,}04$.

**393.°** Решите уравнение:

1) $\sqrt{x}=9$; 2) $\sqrt{x}=\frac{1}{4}$; 3) $\sqrt{x}-0{,}2=0$; 4) $\sqrt{x}+7=0$.

**394.°** Решите уравнение:

1) $\sqrt{x}=20$; 2) $\sqrt{x}=-16$; 3) $\sqrt{x}-\frac{2}{3}=0$.

**395.°** Решите уравнение:

1) $x^2=25$; 2) $x^2=0{,}49$; 3) $x^2=3$; 4) $x^2=-25$.

**396.°** Решите уравнение:

1) $x^2=100$; 2) $x^2=0{,}81$; 3) $x^2=7$; 4) $x^2=3{,}6$.

**397.•** Найдите значение выражения:

1) $-0{,}06\cdot\sqrt{10\,000}+\frac{8}{\sqrt{256}}-2{,}5\sqrt{3{,}24}$;

2) $\sqrt{64}\cdot\sqrt{6{,}25}+\sqrt{2^3+17}$;

3) $\sqrt{1\frac{11}{25}}+3\sqrt{7\frac{1}{9}}-0{,}6\sqrt{3025}$;

4) $\left(\frac{1}{5}\sqrt{75}\right)^2+\sqrt{26^2-24^2}$;

5) $(3\sqrt{8})^2+(8\sqrt{3})^2-2(\sqrt{24})^2$;

6) $\sqrt{144}:\sqrt{0{,}04}-\sqrt{2{,}56}\cdot\sqrt{2500}$.

**398.**° Найдите значение выражения:

1) $0{,}15\sqrt{3600}-0{,}18\sqrt{400}+(10\sqrt{0{,}08})^2$;

2) $\frac{95}{\sqrt{361}}-\frac{13}{14}\sqrt{1\frac{27}{169}}+\sqrt{8^2+15^2}$;

3) $\left(-8\sqrt{\frac{1}{4}}+\frac{\sqrt{1{,}44}}{3}\cdot\sqrt{12{,}25}\right):(0{,}1\sqrt{13})^2$.

**399.**° При каких значениях $x$ имеет смысл выражение:

1) $\sqrt{x}$;
2) $\sqrt{-x}$;
3) $\sqrt{x^2}$;
4) $\sqrt{-x^2}$;
5) $\sqrt{x-8}$;
6) $\sqrt{8-x}$;
7) $\sqrt{x^2+8}$;
8) $\sqrt{(x-8)^2}$;
9) $\frac{1}{\sqrt{(x-8)^2}}$;
10) $\frac{1}{\sqrt{x}-3}$;
11) $\frac{1}{\sqrt{x}+3}$;
12) $\sqrt{x}\cdot\sqrt{-x}$;
13) $\frac{1}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{-x}}$;
14) $\sqrt{|x|}$;
15) $\sqrt{-|x|}$;
16) $\frac{1}{\sqrt{|x|}}$?

**400.**° При каких значениях $y$ имеет смысл выражение:

1) $\sqrt{2y}$;
2) $\sqrt{-3y}$;
3) $\sqrt{y^3}$;
4) $\sqrt{-y^3}$;
5) $\sqrt{-y^4}$;
6) $\frac{1}{\sqrt{y}}$;
7) $\frac{1}{\sqrt{y}-1}$;
8) $\frac{1}{\sqrt{y}+1}$?

**401.**° Решите уравнение:

1) $\sqrt{5x}-4=0$;
2) $\sqrt{5x-4}=0$;
3) $\sqrt{5x-4}=6$;
4) $\frac{42}{\sqrt{x}}=6$;
5) $\frac{18}{\sqrt{x}+3}=9$;
6) $\sqrt{x^2-36}=8$.

**402.*** Решите уравнение:

1) $\frac{1}{3}\sqrt{x}-2=0$;

2) $\sqrt{2x+3}=11$;

3) $\frac{4}{\sqrt{x-5}}=6$;

4) $\sqrt{130-x^2}=9$.

**403.*** Решите уравнение:

1) $(x+6)^2=0$; 2) $(x+6)^2=9$; 3) $(x+6)^2=3$; 4) $(7x+6)^2=5$.

**404.*** Решите уравнение:

1) $(2x-3)^2=25$; 2) $(x-3)^2=7$; 3) $(2x-3)^2=7$.

**405.**** Решите уравнение:

1) $\sqrt{3+\sqrt{2+x}}=4$; 2) $\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{x}}}=3$; 3) $\sqrt{4-\sqrt{10+\sqrt{x}}}=2$.

**406.**** Решите уравнение:

1) $\sqrt{17+\sqrt{\sqrt{x}-6}}=5$;

2) $\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{x}}}=1$.

**407.**** При каких значениях $a$ и $b$ имеет смысл выражение:

1) $\sqrt{ab}$; 2) $\sqrt{-ab}$; 3) $\sqrt{ab^2}$; 4) $\sqrt{a^2b^2}$; 5) $\sqrt{-a^2b}$?

**408.**** Можно ли утверждать, что при любом значении $x$ имеет смысл выражение:

1) $\sqrt{x^2-4x+4}$;

2) $\sqrt{x^2-4x+5}$?

**409.**** Докажите, что не существует такого значения $x$, при котором имеет смысл выражение $\sqrt{-x^2+6x-12}$.

**410.**** Какое из данных выражений имеет смысл при любом значении $x$:

1) $\sqrt{x^2+8x+15}$;

2) $\sqrt{x^2-10x+27}$?

**411.**** Решите уравнение:

1) $\sqrt{x}=-x$;

2) $\sqrt{x}+\sqrt{x-1}=0$;

3) $\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x-1}=0$;

4) $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-4}=0$;

5) $(x-1)\sqrt{x+1}=0$;

6) $(x+1)\sqrt{x-1}=0$.

**412.**** Решите уравнение:

1) $\sqrt{x}+\sqrt{-x}=0$;

2) $\sqrt{x}+\sqrt{-x}=1$;

3) $\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-1}=0$;

4) $(x-2)\sqrt{x-3}=0$.

**413.**** При каких значениях $a$ уравнение $x^2=a+1$:

1) имеет два корня;
2) имеет один корень;
3) не имеет корней?

**414.**** Постройте график функции:

1) $y=\sqrt{-x^2}$; 2) $y=\sqrt{-x^2-4x-4}+2$; 3) $y=\left(\sqrt{x}\right)^2$.

**415.**** Постройте график функции $y=\sqrt{2x-1-x^2}-1$.

**416.*** Для каждого значения $a$ решите уравнение:

1) $a\sqrt{x-1}=0$;
2) $\sqrt{(a-1)x}=0$;
3) $a\sqrt{x-1}=a$;
4) $\sqrt{x-2}=a$.

**417.*** При каких значениях $a$ уравнение $(\sqrt{x}-1)(x-a)=0$ имеет только один корень?

## УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

**418.** Дома на улице пронумерованы подряд числами от 1 до 24. Сколько раз цифра 1 встречается в нумерации?

**419.** Упростите выражение

$$\left(\frac{a}{a^2-25}+\frac{5}{5-a}+\frac{1}{a+5}\right):\left(\frac{28-a^2}{a+5}+a-5\right).$$

**420.** Рабочий получил 4700 грн аванса купюрами по 100 грн и по 500 грн. Сколько было купюр каждого номинала, если всего была 31 купюра?

## УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

**421.** Найдите все трехзначные натуральные числа $n$ такие, что сумма цифр числа $n$ в 11 раз меньше самого числа $n$.

## Растут ли в огороде радикалы?

В Древней Греции действие извлечения корня отождествляли с поиском стороны квадрата по его площади, а сам квадратный корень называли «стороной».

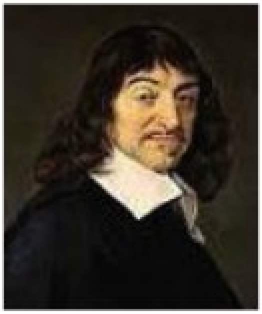
В Древней Индии слово «мула» означало «начало», «основание», «корень дерева». Это же слово стали употреблять и по отношению к стороне квадрата, возможно, исходя из такой ассоциации: из стороны квадрата, как из корня, вырастает сам квадрат. Вероятно, поэтому в латинском языке понятия «сторона» и «корень» выражаются одним и тем же словом — *radix*. От этого слова произошел термин «радикал».

Слово *radix* можно также перевести как «редис», то есть корнеплод — часть растения — видоизмененный корень, который может являться съедобным.

В XIII–XV вв. европейские математики, сокращая слово *radix*, обозначали квадратный корень знаками $R$, $R\!\!\!/$, $R^2$. Например, запись $\sqrt{7}$ имела следующий вид: $R^2 7$.

В XVI в. стали использовать знак $\vee$. Происхождение этого символа, по-видимому, связано с рукописным начертанием латинской буквы $r$.

В XVII в. выдающийся французский математик Рене Декарт, соединив знак $\vee$ с горизонтальной черточкой, получил символ $\sqrt{\phantom{x}}$, который мы и используем сегодня.



**Рене Декарт**
(1596–1650)

## Первая задача первой математической олимпиады в Украине

Задача 391 (4) заслуживает внимания еще и потому, что в 1935 г. именно ее условием открывался текст первой математической олимпиады в Украине. Инициатором этих математических соревнований был выдающийся украинский математик, академик Михаил Филиппович Кравчук[1].

С тех пор прошло более 80 лет, и за это время математические олимпиады стали для многих талантливых школьников первым шагом на пути к научному творчеству. Сегодня такие имена, как А. В. Погорелов, С. Г. Крейн, М. А. Красносельский, В. Г. Дринфельд, известны всему научному миру. Эти выдающиеся ученые в разные годы были победителями математических олимпиад в Украине.

С удовлетворением отмечаем, что и сейчас математические олимпиады в Украине очень популярны. Десятки тысяч школьников нашей страны на различных этапах участвуют в этих математических соревнованиях. В организации и проведении олимпиад задействованы лучшие ученые, методисты, учителя. Именно благодаря их энтузиазму и профессионализму команда Украины достойно представляет нашу страну на международных математических олимпиадах.

Советуем и вам, дорогие восьмиклассники, участвовать в математических олимпиадах.

---

[1] На первом форзаце учебника изображен памятник М. Ф. Кравчуку, установленный на территории Национального технического университета Украины «Киевский политехнический институт». На базе этого учебного заведения один раз в два года проводятся Международные математические конференции имени академика М. Ф. Кравчука.

# 13. Множество и его элементы. Подмножество

Ми часто говорим: стадо баранов, букет цветов, коллекция марок, косяк рыб, стая птиц, рой пчел, собрание картин, набор ручек, компания друзей.

Если в этих парах перемешать первые слова, то может получиться смешно: букет баранов, косяк картин, стадо друзей. В то же время такие словосочетания, как коллекция рыб, коллекция птиц, коллекция картин, коллекция ручек и т. д., вполне приемлемы. Дело в том, что слово «коллекция» достаточно универсальное. Однако в математике есть термин, которым можно заменить любое из первых слов в данных парах. Это слово **множество**.

Приведем еще несколько примеров множеств:

- множество учеников вашего класса;
- множество планет Солнечной системы;
- множество двузначных чисел;
- множество пар чисел $(x; y)$, являющихся решениями уравнения $x^2 + y^2 = 1$.

Отдельным важнейшим множествам присвоены общепринятые названия и обозначения:

- множество точек плоскости — **геометрическая фигура**;
- множество точек, обладающих заданным свойством, — **геометрическое место точек (ГМТ)**;
- множество значений аргумента функции $f$ — **область определения функции** $f$, которую обозначают $D(f)$;
- множество значений функции $f$ — **область значений функции** $f$, которую обозначают $E(f)$.

Как правило, множества обозначают прописными буквами латинского алфавита: $A$, $B$, $C$, $D$ и т. д.

Объекты, составляющие данное множество, называют **элементами** этого множества. Обычно элементы обозначают строчными буквами латинского алфавита: $a$, $b$, $c$, $d$ и т. д.

Если $a$ — элемент множества $A$, то пишут: $a \in A$ (читают: «$a$ принадлежит множеству $A$»). Если $b$ не является элементом множества $A$, то пишут: $b \notin A$ (читают: «$b$ не принадлежит множеству $A$»).

Если множество $A$ состоит из трех элементов $a$, $b$, $c$, то пишут: $A = \{a, b, c\}$.

Если $M$ — множество натуральных делителей числа 6, то пишут: $M = \{1, 2, 3, 6\}$. Множество делителей числа 6, являющихся составными числами, имеет следующий вид: $\{6\}$. Это пример **одноэлементного** множества.

Задавать множество с помощью фигурных скобок, в которых указан список его элементов, удобно в тех случаях, когда множество состоит из небольшого количества элементов.

**Определение. Два множества $A$ и $B$ называют равными, если они состоят из одних и тех же элементов, то есть каждый элемент множества $A$ принадлежит множеству $B$ и, наоборот, каждый элемент множества $B$ принадлежит множеству $A$.**

Если множества $A$ и $B$ равны, то пишут: $A = B$.

Из определения следует, что ***множество однозначно определяется своими элементами***. Если множество записано с помощью фигурных скобок, то порядок, в котором выписаны его элементы, не имеет значения. Так, для множества, состоящего из трех элементов $a$, $b$, $c$, существует шесть вариантов его записи:

$$\{a, b, c\}, \{a, c, b\}, \{b, a, c\}, \{b, c, a\}, \{c, a, b\}, \{c, b, a\}.$$

Поскольку из определения равных множеств следует, что, например, $\{a, b, c\} = \{a, a, b, c\}$, то в дальнейшем будем рассматривать множества, состоящие из разных элементов. Так, множество букв слова «космодром» имеет вид {к, о, с, м, д, р}.

Заметим, что $\{a\} \neq \{\{a\}\}$. Действительно, множество $\{a\}$ состоит из одного элемента $a$; множество $\{\{a\}\}$ состоит из одного элемента — множества $\{a\}$.

Чаще всего множество задают одним из следующих двух способов.

*Первый способ* состоит в том, что множество задают указанием (перечислением) всех его элементов. Мы уже использовали этот способ, записывая множество с помощью фигурных скобок, в которых указывали список его элементов. Ясно, что не всякое множество можно задать таким способом. Например, множество четных чисел так задать невозможно.

*Второй способ* состоит в том, что указывают **характеристическое свойство** элементов множества, то есть свойство, которым обладают все элементы данного множества и только они. Например, свойство «натуральное число при делении на 2 дает в остатке 1» задает множество нечетных чисел.

Если задавать множество характеристическим свойством его элементов, то может оказаться, что ни один объект этим свойством не обладает.

Обратимся к примерам.

- Множество треугольников, стороны которых пропорциональны числам 1, 2, 5. Из неравенства треугольника следует, что это множество не содержит ни одного элемента.
- Обозначим через $A$ множество учеников вашего класса, являющихся мастерами спорта по шахматам. Может оказаться, что множество $A$ также не содержит ни одного элемента.
- Рассматривая множество корней произвольного уравнения, следует предусмотреть ситуацию, когда уравнение корней не имеет.

Приведенные примеры указывают на то, что удобно к совокупности множеств отнести еще одно особенное множество, не содержащее ни одного элемента. Его называют **пустым множеством** и обозначают символом $\varnothing$.

Заметим, что множество $\{\varnothing\}$ не является пустым. Оно содержит один элемент — пустое множество.

Рассмотрим множество цифр десятичной системы счисления: $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Выделим из множества $A$ его элементы, являющиеся четными цифрами. Получим множество $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, все элементы которого являются элементами множества $A$.

**Определение. Множество $B$ называют подмножеством множества $A$, если каждый элемент множества $B$ является элементом множества $A$.**

Это записывают так: $B \subset A$ или $A \supset B$ (читают: «множество $B$ является подмножеством множества $A$» или «множество $A$ содержит множество $B$»).

Рассмотрим примеры:

- множество учеников вашего класса является подмножеством множества учеников вашей школы;
- множество млекопитающих является подмножеством множества позвоночных;
- множество точек луча $CB$ является подмножеством множества точек прямой $AB$ (рис. 19);


Рис. 19

- множество прямоугольников является подмножеством множества параллелограммов;
- $\{a\} \subset \{a, b\}$.

Для иллюстрации соотношений между множествами пользуются схемами, которые называют **диаграммами Эйлера.**

На рисунке 20 изображены множество $A$ (больший круг) и множество $B$ (меньший круг, содержащийся в большем). Эта схема означает, что $B \subset A$ (или $A \supset B$).

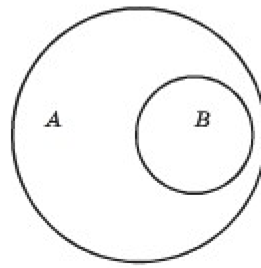



**Рис. 20**

Из определений подмножества и равенства множеств следует, что если $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A = B$.

Если в множестве $B$ нет элемента, не принадлежащего множеству $A$, то множество $B$ является подмножеством множества $A$. В силу этих соображений пустое множество считают подмножеством любого множества. Действительно, пустое множество не содержит ни одного элемента, следовательно, в нем нет элемента, который не принадлежит данному множеству $A$. Поэтому для любого множества $A$ справедливо утверждение: $\varnothing \subset A$.

Любое множество $A$ является подмножеством самого себя, то есть $A \subset A$.

**ПРИМЕР** Выпишите все подмножества множества $A = \{a, b, c\}$.

*Решение.* Имеем: $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{a, c\}$, $\{a, b, c\}$, $\varnothing$. ▲

?

1. Как обозначают множество и его элементы?
2. Как обозначают область определения и область значений функции?
3. Как записать, что элемент принадлежит (не принадлежит) множеству $A$?
4. Какие множества называют равными?
5. Какие существуют способы задания множеств?
6. Какое множество называют пустым? Как его обозначают?
7. Какое множество называют подмножеством данного множества?
8. Как наглядно иллюстрируют соотношение между множествами?
9. Какое множество является подмножеством любого множества?

## УПРАЖНЕНИЯ

**422.°** Как называют множество точек угла, равноудаленных от его сторон?

**423.°** Как называют множество волков, подчиняющихся одному вожаку?

**424.°** Назовите какое-нибудь множество учеников вашей школы.

**425.°** Как называют множество учителей, работающих в одной школе?

**426.°** Дана функция $f(x) = x^2$. Поставьте вместо звездочки знак $\in$ или $\notin$ так, чтобы получить верное утверждение:

1) $3 * D(f)$; 2) $0 * D(f)$; 3) $0 * E(f)$; 4) $-\frac{1}{2} * E(f)$.

**427.°** Какие из следующих утверждений верны:

1) $1 \in \{1, 2, 3\}$; 3) $\{1\} \in \{1, 2\}$; 5) $\varnothing \notin \{1, 2\}$;
2) $1 \notin \{1\}$; 4) $\{1\} \in \{\{1\}\}$; 6) $\varnothing \in \{\varnothing\}$?

**428.°** Запишите множество корней уравнения:

1) $x(x - 1) = 0$; 3) $x = 2$;
2) $(x - 2)(x^2 - 4) = 0$; 4) $x^2 + 3 = 0$.

**429.°** Задайте с помощью перечисления элементов множество:

1) правильных дробей со знаменателем 7;
2) правильных дробей, знаменатель которых не больше 4;
3) букв слова «математика»;
4) цифр числа 5555.

**430.°** Назовите несколько подмножеств учащихся вашего класса.

**431.°** Пусть $A$ — множество букв слова «координата». Множество букв какого из слов является подмножеством множества $A$:

1) нора; 4) крокодил; 7) дар; 10) дорога;
2) трактор; 5) нитки; 8) подарок; 11) корона;
3) картина; 6) корка; 9) ордината; 12) кардинал?

**432.°** Пусть $A$ — множество цифр числа 1958. Является ли множество цифр числа $x$ подмножеством множества $A$, если:

1) $x = 98$; 3) $x = 519$; 5) $x = 195\ 888$;
2) $x = 9510$; 4) $x = 5858$; 6) $x = 91\ 258$?

**433.°** Пусть $A \neq \varnothing$. Какие два разных подмножества всегда имеет множество $A$?

**434.•** Равны ли множества $A$ и $B$, если:

1) $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 1\}$; 3) $A = \{1\}$, $B = \{\{1\}\}$?
2) $A = \{(1; 0)\}$, $B = \{(0; 1)\}$;

**435.•** Равны ли множества $A$ и $B$, если:

1) $A$ — множество корней уравнения $|x| = x$, $B$ — множество неотрицательных чисел;
2) $A$ — множество четырехугольников, у которых противоположные стороны попарно равны; $B$ — множество четырехугольников, у которых диагонали точкой пересечения делятся пополам?

**436.**° Какие из данных множеств равны пустому множеству:

1) множество треугольников, сумма углов которых равна 181°;
2) множество горных вершин высотой более 8800 м;
3) множество остроугольных треугольников, медиана которых равна половине стороны, к которой она проведена;
4) множество функций, графиками которых являются окружности?

**437.**° Докажите, что если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$.

**438.**° Разместите данные множества в такой последовательности, чтобы каждое следующее множество было подмножеством предыдущего:

1) $A$ — множество прямоугольников, $B$ — множество четырехугольников, $C$ — множество квадратов, $D$ — множество параллелограммов;
2) $A$ — множество млекопитающих, $B$ — множество псовых, $C$ — множество позвоночных, $D$ — множество волков, $E$ — множество хищных млекопитающих.

## УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

**439.** Упростите выражение:

1) $\dfrac{5b}{b-3}-\dfrac{b+6}{2b-6}\cdot\dfrac{90}{b^2+6b}$;  2) $\dfrac{b+2}{b^2-2b+1}:\dfrac{b^2-4}{3b-3}-\dfrac{3}{b-2}$.

**440.** Моторная лодка проплыла 36 км по течению реки за 3 ч и 36,8 км против течения за 4 ч. Какова скорость течения реки?

**441.** В коробке лежат 42 карандаша, из них 14 — красные, 16 — синие, а остальные — зеленые. Какова вероятность того, что наугад взятый карандаш не будет ни красным, ни синим?

## УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

**442.** Петя и Дима ежедневно записывают по одному числу. В первый день каждый из мальчиков записал число 1. В каждый последующий день Петя записывает число 1, а Дима — число, равное сумме чисел, записанных мальчиками в предыдущие дни. Может ли в какой-то день Дима записать число, запись которого оканчивается на 101?

# 14. Числовые множества

Натуральные числа — это первые числа, которыми начали пользоваться люди. С ними вы ознакомились в детстве, когда учились считать предметы. Все натуральные числа образуют **множество натуральных чисел**, которое обозначают буквой $\mathbb{N}$.

Практические потребности людей привели к возникновению дробных чисел. Позже появилась необходимость рассматривать величины, для характеристики которых положительных чисел оказалось недостаточно. Так возникли отрицательные числа.

Все натуральные числа, противоположные им числа и число нуль образуют **множество целых чисел**, которое обозначают буквой $\mathbb{Z}$.

Например, $-2 \in \mathbb{Z}$, $0 \in \mathbb{Z}$, $5 \in \mathbb{Z}$.

Множество натуральных чисел является подмножеством множества целых чисел, то есть $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Целые и дробные (как положительные, так и отрицательные) числа образуют **множество рациональных чисел**, которое обозначают буквой $\mathbb{Q}$. Например, $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$, $-0{,}2 \in \mathbb{Q}$, $0 \in \mathbb{Q}$, $-3 \in \mathbb{Q}$, $15 \in \mathbb{Q}$.

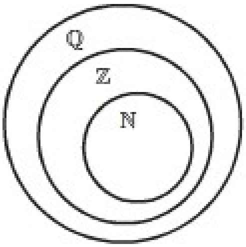



Рис. 21

Понятно, что $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Схема, изображенная на рисунке 21, показывает, как соотносятся множества $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$.

Каждое рациональное число можно представить в виде отношения $\frac{m}{n}$, где $m$ — целое число, а $n$ — натуральное. Например, $5 = \frac{5}{1}$, $-3 = \frac{-3}{1}$, $0{,}2 = \frac{1}{5}$, $0 = \frac{0}{7}$, $5{,}3 = \frac{53}{10}$. С возможностью такого представления связано название «рациональное число»: одним из значений латинского слова *ratio* является «отношение».

В 6 классе вы узнали, что каждое рациональное число можно представить в виде конечной десятичной дроби или в виде бесконечной периодической десятичной дроби. Для дроби $\frac{m}{n}$ такое представление можно получить, выполнив деление числа $m$ на число $n$ уголком.

Например, $\frac{5}{8}=0{,}625$, $\frac{5}{11}=0{,}454545...$ .

Число $\frac{5}{8}$ записано в виде конечной десятичной дроби, а число $\frac{5}{11}$ — в виде бесконечной периодической десятичной дроби. В записи 0,454545... цифры 4 и 5 периодически повторяются. Повторяющуюся группу цифр называют **периодом дроби** и записывают в круглых скобках. В данном случае период дроби составляет 45, а дробь $\frac{5}{11}$ записывают так: $\frac{5}{11}=0{,}(45)$.

Заметим, что любую конечную десятичную дробь и любое целое число можно представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби. Например,

$0{,}625 = 0{,}6250000... = 0{,}625(0)$;

$2 = 2{,}000... = 2{,}(0)$.

Следовательно, ***каждое рациональное число можно представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби.***

Справедливо и такое утверждение: ***каждая бесконечная периодическая десятичная дробь является записью некоторого рационального числа.***

В 9 классе вы научитесь записывать бесконечную периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной дроби.

Сумма и произведение двух натуральных чисел являются натуральными числами. Однако разность натуральных чисел не всегда обладает таким свойством. Например, $(5-7)\notin \mathbb{N}$.

Сумма, разность, произведение двух целых чисел являются целыми числами. Однако частное целых чисел не всегда обладает таким свойством. Например, $\frac{5}{7}\notin \mathbb{Z}$.

Сумма, разность, произведение и частное (кроме деления на нуль) двух рациональных чисел являются рациональными числами.

Итак, действие вычитания натуральных чисел может вывести результат за пределы множества $\mathbb{N}$, действие деления целых чисел — за пределы множества $\mathbb{Z}$, однако выполнение любого из четырех арифметических действий с рациональными числами не выводит результат за пределы множества $\mathbb{Q}$.

Вы ознакомились с новым действием — извлечением квадратного корня. Возникает естественный вопрос: всегда ли квадратный корень из неотрицательного рационального числа является рациональным числом? Иными словами, может ли действие извлечения квадратного корня из рационального числа вывести результат за пределы множества $\mathbb{Q}$?

Рассмотрим уравнение $x^2 = 2$. Поскольку $2 > 0$, то это уравнение имеет два корня: $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$ (рис. 22). Однако *не существует рационального числа, квадрат которого равен* 2 (доказательство этого факта вы можете найти в рубрике «Когда сделаны уроки» в рассказе «Открытие иррациональности»), то есть числа $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$ не являются рациональными. Эти числа — примеры **иррациональных чисел** (приставка «ир» означает отрицание).

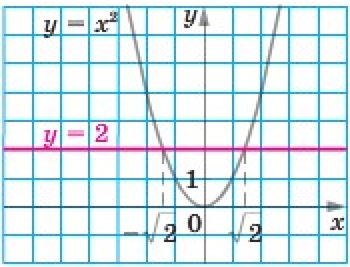



Рис. 22

Следовательно, действие извлечения корня из рационального числа может вывести результат за пределы множества $\mathbb{Q}$.

Ни одно иррациональное число не может быть представлено в виде дроби $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, а следовательно, и в виде бесконечной периодической десятичной дроби.

Иррациональные числа могут быть представлены в виде **бесконечных непериодических** десятичных дробей.

Например, с помощью специальной компьютерной программы можно установить, что

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135623730950488016887242097\ldots .$$

Числа $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$ — это не первые иррациональные числа, с которыми вы встречаетесь. Число $\pi$, равное отношению длины окружности к диаметру, также является иррациональным:

$$\pi = 3{,}1415926535897932384626433832795028841971693993 7\ldots .$$

Иррациональные числа возникают не только в результате извлечения квадратных корней. Их можно конструировать, строя бесконечные непериодические десятичные дроби.

Например, число 0,101001000100001000000... (после запятой записаны последовательно степени числа 10) является иррациональным. Действительно, если предположить, что у рассматриваемой десятичной дроби есть период, состоящий из $n$ цифр, то с некоторого места этот период будет полностью состоять из нулей. Иными словами, начиная с этого места в записи не должна встретиться ни одна единица, что противоречит конструкции числа.

Вместе множества иррациональных и рациональных чисел образуют **множество действительных чисел**. Его обозначают буквой $\mathbb{R}$ (первой буквой латинского слова *realis* — «реальный», «существующий в действительности»).

Теперь «цепочку» $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ можно продолжить: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Связь между числовыми множествами, рассмотренными в этом пункте, иллюстрирует схема, изображенная на рисунке 23.


**Рис. 23**

Длину любого отрезка можно выразить действительным числом. Этот факт позволяет установить связь между множеством $\mathbb{R}$ и множеством точек координатной прямой. Точке $O$, началу отсчета, поставим в соответствие число 0. Каждой точке $A$ координатной прямой, отличной от точки $O$, поставим в соответствие единственное число, равное длине отрезка $OA$, если точка $A$ расположена справа от точки $O$, и число, противоположное длине отрезка $OA$, если точка $A$ расположена слева от точки $O$. Также понятно, что каждое действительное число является соответствующим единственной точке координатной прямой.

Над действительными числами можно выполнять четыре арифметических действия: сложение, вычитание, умножение, деление (кроме деления на ноль), в результате будем получать действительное число. Эти действия обладают известными вам свойствами:

| | |
|---|---|
| $a + b = b + a$ | Переместительное свойство сложения |
| $ab = ba$ | Переместительное свойство умножения |
| $(a + b) + c = a + (b + c)$ | Сочетательное свойство сложения |
| $(ab)\,c = a\,(bc)$ | Сочетательное свойство умножения |
| $a\,(b + c) = ab + ac$ | Распределительное свойство умножения относительно сложения |

Действительные числа можно сравнивать, используя правила сравнения десятичных дробей, то есть сравнивая цифры в соответствующих разрядах. Например, $7{,}853126... < 7{,}853211...$ .

Любое положительное действительное число больше нуля и любого отрицательного действительного числа. Любое отрицательное действительное число меньше нуля. Из двух отрицательных действительных чисел больше то, у которого модуль меньше.

Если отметить на координатной прямой два действительных числа, то меньшее из них будет расположено слева от большего.

Находя длину окружности и площадь круга, вы пользовались **приближенным значением числа** $\pi$ (например, $\pi \approx 3{,}14$). Аналогично при решении практических задач, где нужно выполнить действия с действительными числами, при необходимости эти числа заменяют их приближенными значениями. Например, для числа $\sqrt{2}$ можно воспользоваться такими приближенными равенствами: $\sqrt{2} \approx 1{,}414$ или $\sqrt{2} \approx 1{,}415$. Первое из них называют приближенным значением числа $\sqrt{2}$ по недостатку с точностью до $0{,}001$, второе — приближенным значением числа $\sqrt{2}$ по избытку с точностью до $0{,}001$. Более подробно о приближенных значениях вы узнаете в 9 классе.

В заключение подчеркнем, что из любого неотрицательного действительного числа можно извлечь квадратный корень и в результате этого действия получить действительное число. Следовательно, действие извлечения квадратного корня из неотрицательного действительного числа не выводит результат за пределы множества $\mathbb{R}$.

?

1. Какие числа образуют множество целых чисел?
2. Какой буквой обозначают множество целых чисел?
3. Какие числа образуют множество рациональных чисел?
4. Какой буквой обозначают множество рациональных чисел?
5. В виде какого отношения можно представить каждое рациональное число?
6. Как связаны между собой рациональные числа и бесконечные периодические десятичные дроби?
7. Как называют числа, не являющиеся рациональными?
8. Какие множества образуют вместе множество действительных чисел?
9. Какой буквой обозначают множество действительных чисел?
10. Как взаимосвязаны числовые множества $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$?

## УПРАЖНЕНИЯ

**443.°** Какое из данных утверждений неверно:
1) $-3$ — действительное число;
2) $-3$ — рациональное число;
3) $-3$ — целое число;
4) $-3$ — натуральное число?

**444.°** Верно ли утверждение:
1) $1 \in \mathbb{N}$;
2) $1 \in \mathbb{Z}$;
3) $1 \in \mathbb{Q}$;
4) $1 \in \mathbb{R}$;
5) $-2{,}3 \in \mathbb{N}$;
6) $-2{,}3 \in \mathbb{R}$;
7) $\sqrt{7} \notin \mathbb{R}$;
8) $\sqrt{121} \notin \mathbb{R}$;
9) $\frac{\pi}{3} \in \mathbb{R}$?

**445.°** Верно ли утверждение:
1) $0 \in \mathbb{N}$;
2) $0 \notin \mathbb{Z}$;
3) $0 \in \mathbb{R}$;
4) $-\frac{3}{7} \in \mathbb{Q}$;
5) $-\frac{3}{7} \notin \mathbb{R}$;
6) $\sqrt{9} \in \mathbb{Q}$;
7) $\sqrt{9} \in \mathbb{Z}$;
8) $\sqrt{9} \in \mathbb{R}$?

**446.°** Верно ли утверждение:
1) любое натуральное число является целым;
2) любое натуральное число является рациональным;
3) любое натуральное число является действительным;
4) любое рациональное число является целым;
5) любое действительное число является рациональным;
6) любое рациональное число является действительным;
7) любое иррациональное число является действительным;
8) любое действительное число является либо рациональным, либо иррациональным?

**447.°** Какие из данных бесконечных дробей являются записями рациональных чисел, а какие — иррациональных:
1) 0,(3);
2) 0,4(32);
3) 0,20200200020... (количество нулей между соседними двойками последовательно увеличивается на 1)?

**448.°** Сравните:
1) 6,542... и 6,452...;
2) $-24{,}064...$ и $-24{,}165...$ .

**449.°** Сравните:
1) 0,234... и 0,225...;
2) $-1{,}333...$ и $-1{,}345...$ .

**450.°** С помощью микрокалькулятора найдите приближенное значение числа $\sqrt{3}$ с точностью до 0,01: 1) по недостатку; 2) по избытку.

**451.°** С помощью микрокалькулятора найдите приближенное значение числа $\sqrt{5}$ с точностью до 0,01: 1) по недостатку; 2) по избытку.

**452.•** Укажите какое-нибудь значение $a$, при котором уравнение $x^2 = a$:

1) имеет два рациональных корня;
2) имеет два иррациональных корня;
3) не имеет корней.

**453.•** Сравните числа:

1) $\frac{43}{7}$ и 6,12;
2) 3,(24) и 3,24;
3) $\pi$ и 3,(14);
4) −2,(36) и −2,36;
5) 7,(18) и 7,(17).

**454.•** Сравните числа:

1) $\frac{1}{6}$ и 0,2;
2) $\frac{7}{9}$ и 0,77;
3) −1,(645) и −1,(643).

**455.•** Запишите в порядке убывания числа 3,(16); $\pi$; −1,82...; −0,08...; 2,(136).

**456.•** Запишите в порядке возрастания числа 1,57; 1,571...; $\frac{\pi}{2}$; 1,(56); 1,(572).

**457.••** Докажите, что сумма, разность, произведение и частное двух рациональных чисел являются рациональными числами.

**458.••** Докажите, что сумма рационального и иррационального чисел является иррациональным числом.

**459.••** Верно ли, что:

1) сумма любых двух иррациональных чисел является иррациональным числом;
2) произведение любых двух иррациональных чисел является иррациональным числом;
3) произведение любого иррационального числа и любого рационального числа является иррациональным числом?

## УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

**460.** В каждом подъезде на каждом этаже девятиэтажного дома по восемь квартир. В каком подъезде и на каком этаже находится квартира № 186?

**461.** Натуральные числа $a$ и $b$ таковы, что $a$ — четное число, а $b$ — нечетное. Значение какого из данных выражений не может быть натуральным числом:

1) $\frac{8b}{5a}$; 2) $\frac{a^2}{b^2}$; 3) $\frac{4a}{b}$; 4) $\frac{b^2}{a}$?

**462.** Докажите, что при всех допустимых значениях переменной значение выражения

$$\left(\frac{3}{4-4a+a^2}+\frac{2}{a^2-4}\right)\cdot(a-2)^2-\frac{2a-4}{a+2}$$

не зависит от значения $a$.

**463.** В ведре несколько литров воды. Если отлить половину воды, то в нем останется на 14 л воды меньше, чем помещается в ведре. Если долить 4 л, то объем воды составит $\frac{2}{3}$ того, что помещается в ведре. Сколько литров воды помещается в ведре?

## ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

**464.** Найдите значение выражения:

1) $|-3,5|-|2,6|$; 2) $|-9,6|-|-32|$.

**465.** Модуль какого числа равен 6?

**466.** Для каких чисел выполняется равенство:

1) $|a|=a$; 3) $|a|=|-a|$;

2) $|a|=-a$; 4) $|a|=-|a|$?

**467.** Для каких чисел одновременно выполняются оба равенства $|a|=a$ и $|a|=-a$?

**468.** Найдите значение каждого из выражений $a^2$, $(-a)^2$, $|a|^2$ при $a=-8$ и при $a=7$. Сделайте вывод.

**469.** Известно, что $a>0$, $c<0$. Сравните с нулем значение выражения:

1) $a^3c^4$; 2) $ac^5$.

## УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

**470.** В роте 100 солдат. Каждую ночь на дежурство выходят три солдата. Можно ли так организовать дежурство, чтобы через некоторое время каждый солдат побывал на дежурстве с каждым из остальных солдат ровно один раз?

## Открытие иррациональности

В п. 14, решая графически уравнение $x^2 = 2$, мы установили, что длина каждого из отрезков $OA$ и $OB$ равна $\sqrt{2}$ (рис. 24). Покажем, что число $\sqrt{2}$ иррациональное.

Предположим, что число $\sqrt{2}$ рациональное. Тогда его можно представить в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$, где $m$ и $n$ — натуральные числа. Имеем:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

Тогда $(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2$; $2 = \frac{m^2}{n^2}$; $m^2 = 2n^2$.

Из последнего равенства следует, что число $m^2$ четное. А это значит, что четным является и число $m$. Тогда $m = 2k$, где $k$ — некоторое натуральное число. Имеем: $(2k)^2 = 2n^2$; $4k^2 = 2n^2$; $n^2 = 2k^2$. Отсюда следует, что число $n^2$, а следовательно, и число $n$ четные.

Таким образом, числитель и знаменатель дроби $\frac{m}{n}$ — четные числа. Следовательно, эта дробь является сократимой. Получили противоречие.

Приведенный пример показывает, что существуют отрезки (в нашем случае это отрезки $OA$ и $OB$ на рисунке 24), длины которых нельзя выразить рациональными числами, то есть *для измерения отрезков рациональных чисел недостаточно*.

Этот факт был открыт в школе великого древнегреческого ученого Пифагора.

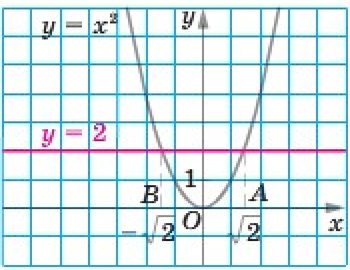
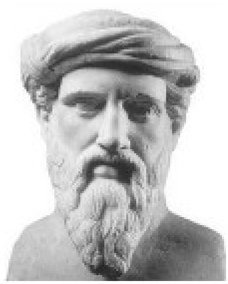



**Рис. 24**



**Пифагор**
(ок. 570 — ок. 500 г. до н. э.)

Сначала пифагорейцы считали, что для любых отрезков $AB$ и $CD$ всегда можно найти такой отрезок $MN$, который в каждом из них укладывается целое число раз. Отсюда следовало, что отношение длин любых двух отрезков выражается отношением целых чисел, то есть рациональным числом.

Например, на рисунке 25 имеем: $AB = 5MN$, $CD = 2MN$ и $\frac{AB}{CD} = \frac{5}{2}$. Отрезок $MN$ называют **общей мерой** отрезков $AB$ и $CD$.

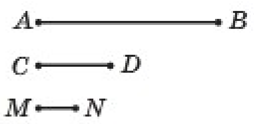


**Рис. 25**

Если для отрезков существует общая мера, то их называют **соизмеримыми**. Например, отрезки $AB$ и $CD$ (рис. 25) являются соизмеримыми.

Итак, древнегреческие ученые считали, что любые два отрезка соизмеримы. А из этого следовало, что длину любого отрезка можно выразить рациональным числом.

Действительно, пусть некоторый отрезок $AB$ выбран в качестве единичного. Тогда для отрезка $AB$ и любого другого отрезка $CD$ существует отрезок длиной $e$, являющийся их общей мерой. Получаем: $AB = ne$, $CD = me$, где $m$ и $n$ — некоторые натуральные числа. Отсюда $\frac{CD}{AB} = \frac{me}{ne} = \frac{m}{n}$. Поскольку $AB = 1$, то $CD = \frac{m}{n}$.

Однако сами же пифагорейцы сделали выдающееся открытие. Они доказали, что диагональ и сторона квадрата несоизмеримы, то есть если сторону квадрата принять за единицу, то длину диагонали квадрата выразить рациональным числом нельзя.

Для доказательства рассмотрим произвольный квадрат $ABCD$ и примем его сторону за единицу длины. Тогда его площадь равна $AB^2 = 1$. На диагонали $AC$ построим квадрат $ACEF$ (рис. 26). Понятно, что площадь квадрата $ACEF$ в 2 раза больше площади квадрата $ABCD$. Отсюда $AC^2 = 2$, то есть $AC = \sqrt{2}$. Следовательно, длина диагонали $AC$ не может быть выражена рациональным числом.

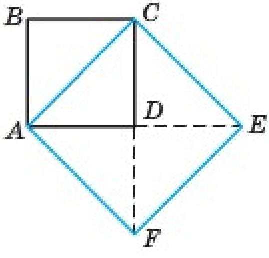


**Рис. 26**

Это открытие изменило один из фундаментальных постулатов древнегреческих ученых, заключавшийся в том, что отношение любых двух величин выражается отношением целых чисел.

Существует легенда о том, что пифагорейцы держали открытие иррациональных чисел в строжайшей тайне, а человека, разгласившего этот факт, покарали боги: он погиб при кораблекрушении.

### УПРАЖНЕНИЯ

**1.** Докажите, что число $\sqrt{3}$ иррациональное.

**2.** Докажите, что если натуральное число $n$ не является квадратом натурального числа, то число $\sqrt{n}$ иррациональное.

## 15. Свойства арифметического квадратного корня

Легко проверить, что $\sqrt{5^2}=5$, $\sqrt{1{,}4^2}=1{,}4$, $\sqrt{0^2}=0$. Может показаться, что при любом значении $a$ выполняется равенство $\sqrt{a^2}=a$. Однако это не так. Например, равенство $\sqrt{(-5)^2}=-5$ является ошибочным, поскольку $-5<0$. На самом деле $\sqrt{(-5)^2}=5$. Также можно убедиться, что, например, $\sqrt{(-7)^2}=7$, $\sqrt{(-2{,}8)^2}=2{,}8$.

Вообще, справедлива следующая теорема.

**Теорема 15.1.** ***Для любого действительного числа a выполняется равенство***

$$\sqrt{a^2}=|a|.$$

*Доказательство.* Для того чтобы доказать равенство $\sqrt{a}=b$, надо показать, что $b \geqslant 0$ и $b^2=a$.

Имеем: $|a| \geqslant 0$ при любом $a$.

Также из определения модуля следует, что $|a|^2=a^2$. ▲

Следующая теорема обобщает доказанный факт.

**Теорема 15.2 (арифметический квадратный корень из степени).** ***Для любого действительного числа a и любого натурального числа n выполняется равенство***

$$\sqrt{a^{2n}}=|a^n|.$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 15.1. Проведите это доказательство самостоятельно.

**Теорема 15.3 (арифметический квадратный корень из произведения).** ***Для любых действительных чисел $a$ и $b$ таких, что $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$, выполняется равенство***

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

*Доказательство.* Имеем: $\sqrt{a} \geqslant 0$ и $\sqrt{b} \geqslant 0$. Тогда $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geqslant 0$. Кроме того, $(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = ab$. Следовательно, выражение $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ принимает только неотрицательные значения, и его квадрат равен $ab$. ▲

Эту теорему можно обобщить для произведения трех и более множителей. Например, если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ и $c \geqslant 0$, то

$$\sqrt{abc} = \sqrt{(ab)\,c} = \sqrt{ab} \cdot \sqrt{c} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}.$$

**Теорема 15.4 (арифметический квадратный корень из дроби).** ***Для любых действительных чисел $a$ и $b$ таких, что $a \geqslant 0$ и $b > 0$, выполняется равенство***

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 15.3. Проведите это доказательство самостоятельно.

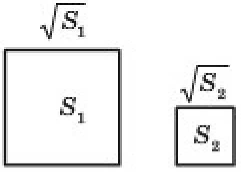



**Рис. 27**

Понятно, что из двух квадратов с площадями $S_1$ и $S_2$ (рис. 27) бо́льшую сторону имеет тот, у которого площадь больше, то есть если $S_1 > S_2$, то $\sqrt{S_1} > \sqrt{S_2}$. Это очевидное соображение иллюстрирует такое свойство арифметического квадратного корня: ***для любых неотрицательных чисел $a_1$ и $a_2$ таких, что $a_1 > a_2$, выполняется неравенство $\sqrt{a_1} > \sqrt{a_2}$.***

**ПРИМЕР 1** Найдите значение выражения: 1) $\sqrt{(-7{,}3)^2}$; 2) $\sqrt{1{,}2^4}$; 3) $\sqrt{0{,}81 \cdot 225}$; 4) $\sqrt{\frac{16}{49}}$.

*Решение.* 1) $\sqrt{(-7{,}3)^2} = |-7{,}3| = 7{,}3$.

2) $\sqrt{1{,}2^4} = 1{,}2^2 = 1{,}44$.

3) $\sqrt{0{,}81 \cdot 225} = \sqrt{0{,}81} \cdot \sqrt{225} = 0{,}9 \cdot 15 = 13{,}5$.

4) $\sqrt{\frac{16}{49}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{49}} = \frac{4}{7}$. ▲